有理三重点注记

陆俊
（华东师范大学数学系）

2004年9月1日

摘　　要

本文通过对三次覆盖的局部方程以及奇点解消数据的讨论来研究有理三重点。

以下所引用的记号如无特别声明，均指[1]中所表示的含义。

设 $\pi : X \to Y$ 是平坦三次覆盖，且 X 正规。设 $\tilde{p} \in X$ 是一个奇点，$p \in Y$ 是 $\tilde{p}$ 的像。以后我们不妨假设 X 上只有奇点$\tilde{p}$（通过解消总可以做到这一点），下图是它对应的光滑解消

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{X} & \xrightarrow{\sigma_{k-1}} & X_{k-1} & \xrightarrow{\sigma_{k-2}} & \cdots & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & X \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{k-1}} & & \cdots & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\tilde{Y} & \xrightarrow{\sigma_{k-1}} & Y_{k-1} & \xrightarrow{\sigma_{k-2}} & \cdots & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & Y
\end{array}$$

我们知道，$\tilde{p}$ 是有理的充要条件是 $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \chi(\mathcal{O}_X)$. 这样，结合[1]中的不变量公式可得：

命题 1.1. *$\tilde{p}$ 有理的充分必要条件是，它满足下式：*

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(w_i - v_i)(w_i - v_i - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} v_i(v_i - 1) = \deg \Delta - \deg \tilde{\Delta} \qquad (1.1)$$

以上的 w_i, v_i 等是解消数据，其具体含义见[1]。

关于有理奇点的重数，Artin得到如下结论（见[2]）：

引理 1.2. (Artin) *设 $\sigma : \tilde{X} \to X$ 是 $\tilde{p}$ 的奇点解消。如果 $\tilde{p}$ 是有理的，那么它的重数是 $-Z^2$ ，其 Zariski 切空间维数是 $-Z^2 + 1$. 这里 Z 是 $\tilde{p}$ 对*

应的基本闭链。

我们考虑 $\pi\Psi$ $X \to Y$ 的局部方程(见[3])：

$$\begin{cases} z^2 &= \tilde{a}z + \tilde{b}w + 2\tilde{A} \\ zw &= -\tilde{d}z - \tilde{a}w - \tilde{B} \\ w^2 &= \tilde{c}z + \tilde{d}w + 2\tilde{C} \end{cases} \qquad (1.2)$$

引理 1.3. 如果 $\tilde{p} \in X$ 是有理的，则 $\tilde{p}$ 要么是二重的要么是三重的，它的重数恰是其 Zariski 切空间维数减 1.

证明：结论的后半部只是引理 1.2 的直接推论。今设 m 是 $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{p}}$ 的极大理想。Zariski 切空间维数即 $\dim m/m^2$. 由方程 (1.2) 可知，$\dim m/m^2 \leq 4$. 所以 $\tilde{p}$ 至多是三重的。 □

命题 1.4. $\tilde{p}$ 是有理三重点当且仅当 (1.1) 式成立，并且 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in m$.

证明：充分性可直接由引理 1.1 及[1]的Lem3.1得到。下证必要性。由引理 1.1 知式 (1.1) 成立。在[3]中，$\tilde{p}$ 可以分为以下几类：

(i)$\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in m$
(ii)$\tilde{d} \notin m, \tilde{a}, \tilde{c} \in m, \tilde{b} \in m^2$
(iii)$\tilde{a} \notin m, \tilde{b}, \tilde{d} \in m, \tilde{c} \in m^2$
(iv)$\tilde{b} \notin m, \tilde{A} \in m, \tilde{b}\tilde{B} - 2\tilde{a}\tilde{A} \in m^2$
(v)$\tilde{c} \notin m, \tilde{C} \in m, \tilde{c}\tilde{B} - 2\tilde{d}\tilde{C} \in m^2$
(vi)$\tilde{b} \notin m, \tilde{A} \notin m, \tilde{D} \in m$
(vii)$\tilde{c} \notin m, \tilde{C} \notin m, \tilde{D} \in m$

下面我们只要验证 (ii) 到 (vii) 均是有理二重点即可。由引理 1.3 ,只需证 $\dim m/m^2 \leq 3$ 即可。我们以(ii)为例，其余情形类似可证。在 m/m^2 中，$\tilde{d}z + \tilde{B} = 0$, 由于 $\tilde{d} \notin m$ ，所以 z 可由 x, y 生成 (在 m/m^2 中),于是 $\dim m/m^2 \leq 3$. 由引理 1.3. ，这只能是有理二重点。 □

命题 1.5. (a)当 $p \notin F_3$时，$\tilde{p}$ 是有理三重点当且仅当 (1.1) 式成立，并且 p 满足以下情形中的一种：

(1)$p \nmid a_1, p \nmid a_2, p|a_0, p|b_1, p|b_0$; (2)$p \nmid a_1, p|a_2, p|b_0$;
(3)$p|a_1, p \nmid a_2, p|b_1$; (4)$p|a_1, p|a_2$

(b)当 $p \notin F_2$ 时，$\tilde{p}$ 是有理三重点当且仅当 (1.1) 式成立，并且p 满足以下情形中的一种：

(1)$p \nmid a_1, p \nmid a_2, p|a_0, p|c_1, p|c_0$; (2)$p \nmid a_1, p|a_2, p|c_0$;
(3)$p|a_1, p \nmid a_2, p|c_1$; (4)$p|a_1, p|a_2$

(c)当 $p \notin F_1$ 时，$\tilde{p}$ 是有理三重点当且仅当 (1.1) 式成立，并且p 满足以下情形中的一种：

$(1)p|b_1, p \not| b_0, p|c_1; (2)p \not| b_1, p|b_0, p|c_0;$
$(3)p|b_1, p|b_0, p \not| c_1, p|c_0; (4)p|b_1, p|b_0, p|c_1$

这里诸 a, b, c 是 p 处的三次覆盖数据，诸 F_i 的定义可见[4]。

证明：这是命题 1.5 的直接推论。当然，这里还需要用到[1]]定理 5.1 证明中所提及的三类计算式（也可直接见[4]的定理 3.5 证明）。 □

推论 1.6. 如果 $\tilde{p}$ 是有理三重点，则 $\tilde{p}$ 是全分歧点，并且 p 落在非正规轨迹$A_2 + B_1 + C_0$上。

证明：当 $p \in Y \backslash Z (Z = F_1 \cap F_2 \cap F_3)$ 时，由命题 1.5 知，$p \in A_2 + B_1 + C_0$. 当 $p \in Z$ 显然也有上述结论。

由于 $p \in \{\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\} = \{\tilde{b} = 0\} \cap \{\tilde{A} = \tilde{B} = \tilde{C} = 0\} \subseteq \{\tilde{A} = \tilde{B} = \tilde{C} = 0\}$，所以 $\tilde{p}$ 是全分歧点。 □

命题 1.7. 假设 B_0, C_0 不在 p 处同时出现，并且在对 $\tilde{p}$ 解消完后，新的轨迹 $\tilde{B}_0, \tilde{C}_0$ 也不会在同一点（指 p 的完全原像上的点）出现，那么 $\tilde{p}$ 是有理奇点当且仅当 $\{w_i, v_i\}_{i=0}^{k-1}$ 总是满足以下情形的一种：

$$(1)\begin{cases} w = 2 \\ v = 1 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} w = 1 \\ v = 1 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} w = 1 \\ v = 0 \end{cases} \quad (4)\begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

进一步，$\tilde{p}$ 是有理三重点当且仅当上述条件成立，并且 $w_0 = 2, v_0 = 1$.

证明：在上述假设条件下，(1.1) 式相当于

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(w_i - v_i)(w_i - v_i - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} v_i(v_i - 1) = 0$$

注意到左端求和项都是非负的，从而得到上述条件。在该命题的假设条件下，我们可以列出有理奇点的分歧轨迹重数的所有可能情形（见推论 1.10）。当 C_0（对称的，B_0）不过 p 时，由命题 1.5 可以从中检验出所有的有理三重点情形。它们都满足$w_0 = 2, v_0 = 1$. □

注 1.1. ：在上述假设条件下，有理二重点都满足$w_0 = 1$; 光滑点（由 cusps 点产生）满足$w_0 = 0$.

注 1.2. ：这样的假设条件是相当宽松的。事实上，杜荣及谈胜利（见[5]）目前构造的所有例子都可以归纳到这一假设条件下。我们还可以强化这

一假设：要求每次 Blow-up 中 B_0, C_0 不同时出现。它同样包含了所有已知的例子。

注 1.3. ：在上述强化的条件下，每次 Blow-up 出的新奇点也必是有理的。如果解消中不出现 cusps 点，那么“Harikawa 数 $H_p = 0$ ”结论等价于说“在极小解消中收缩掉的那些 (-1) 曲线个数就是 Blow-up 中出现有理二重点的总数。”这可以理解为每个有理二重点提供了一条(-1) 曲线。

推论 1.8. Galois 三次覆盖上的有理三重点只有以下三种类型（用局部三次方程表示）：

$$\begin{cases} z^3 + y^2(x^2+y^3)z + y^2(x^2+y^3) & = 0 \\ z^3 + xy(x+y^n)^2 z + xy(x+y^n)^2 & = 0 \\ z^3 + x^2(x+y^n)z + x^2(x+y^n) & = 0 \end{cases}$$

证明：命题 1.7 知，此时必有$2 \le \mu_p(A_1) + \mu_p(A_2) \le 3$. 由此很容易确定出所有可能情形。 □

推论 1.9. 假设 $\pi : X \to Y$ 由极小三次覆盖数据 $(a,b,c) = (x^n, y^m, 4x^n + 27y^m)$ 给出(不考虑 Galois 覆盖)。那么这种三次覆盖上的有理三重点有且只有以下几种：

(1) $(a,b) = (x^3, y^{1+2n})$ $b_{n-1}\ b_{n-2}\ \cdots\ b_1$

(2) $(a,b) = (x^2, y^{1+2n})$ $b_{n-1}\ b_{n-2}\ \cdots\ b_1$, a_1, $a_2\ a_3\ \cdots\ a_{2n+2}$

(3) $(a,b) = (x^2, y^{2n})$ （等长）

(4) $(a,b) = (x, y^{1+2n})$ $(n \ge 0)$ （同 (1)，此时共 $3n$ 条 (-2) 曲线）

(5) $(a,b) = (x^{3n+k}, y^k)$ $(n \ge 0, k = 1, 2)$ （平凡有理三重点）

(6) $(a,b) = (x^{3n}, y^3)$ $(n \ge 1)$ （同 (3)）

(7) $(a,b) = (x^{3n+1}, y^3)$ $(n \ge 0)$ （见[5]）

(8) $(a,b) = (x^{3n+2}, y^3)$ $(n \ge 0)$ （见[5]）

(9) $(a,b) = (x^6, y^5)$ （见[5]）

(7) $(a,b) = (x^5, y^4)$ （见[5]）

这表明仅仅用单项式系数的局部三次方程是不可能实现所有有理三重点的。这个结论同样是命题 1.7 的推论，这里不再详细证明了。

推论 1.10. 设 $p(\notin F_3)$ 是有理三重点，那么 p 有且仅有以下几类（按重

数来分）:

$$(1)\begin{cases}\mu_p(\tilde{b})+\mu_(\tilde{c}) & =3\\ \mu_p(\tilde{D}) & =6\end{cases}\quad(2)\begin{cases}\mu_p(\tilde{b}) & =1\\ \mu_p(\tilde{d}) & =1\\ \mu_p(\tilde{D}) & =4\end{cases}\quad(3)\begin{cases}1\le\mu_(\tilde{b}) & \le 2\\ \mu_p(\tilde{d}) & =1\\ \mu_p(\tilde{D}) & =5\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\mu_p(\tilde{b}) & =2\\ \mu_p(\tilde{c}) & =2\\ \mu_p(\tilde{d}) & \ge 2\\ \mu_p(\tilde{D}) & =4\end{cases}\quad(5)\begin{cases}1\le\mu_p(\tilde{b}) & =1\\ \mu_p(\tilde{c}) & =1\\ \mu_p(\tilde{d}) & \ge 2\\ \mu_p(\tilde{D}) & =4\end{cases}$$

(由命题 1.4 ， $\mu_p(\tilde{a}),\mu_p(\tilde{b}),\mu_p(\tilde{c}),\mu_p(\tilde{d})\ge 1$)

注 1.4. **：**只要由文[1, 4] 的计算式就可以将上述重数化为一般的三次覆盖数据。有理三重点的所有情形都包含在这里(对称的，$\mu_p(B_0)=0$) 。我们剩下要做的工作就是一一验证这些奇点，确定出它们的所有不同类型的局部方程（使用的方法类似于 BPV ,当然我们更倾向于直接从解消图来讨论它）。理论上说，这一工作不存在本质上的困难，只是计算稍繁一些而已。

注 1.5. **：**式(1.1)在某些条件下可以得到推广。比如要求 π 及$\tilde{\pi}$ 对应的 trace-free 层都分裂，那么这时有理性的条件是：

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(w_i-v_i-v_i^{'})(w_i-v_i-1-v_i^{'})+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(v_i+v_i^{'})(v_i+v_i^{'}-1)=0\qquad(1.1)^{'}$$

注意到这些求和项是非负的，这样就得到类似命题 1.7 的结论。

参 考 文 献

[1] S.-L. Tan, Triple covers on smooth algebraic varieties, Stud.Adv.Math., Vol 29(2002),143-164

[2] M. Artin, On Isolated Rational Singularities of Surfaces , Amer.J.Math.88(1966),129-136

[3] R. Miranda, Triple covers in algebraic Geometry, Amer.J.Math.107(1985),1123-1158

[4] S.-L. Tan, Integral closure of a cubic extension and applications, Amer.Math.soc. Vol 129(2001), No 9, 2553-2562

[5] S.-L. Tan, On Rational Triple Points, unknown to publish.