代数几何讨论班备用稿

曲面叶层简明讲义

陆　　俊

华东师范大学数学系

二零一六年八月

前　言

本讲义是在 [Bru15] 及其他参考文献基础上整理而成, 仅供本专业学生在相关讨论班学习中参考. 由于撰稿时间仓促且本人理解所限，文中尚有不少错误. 因此诚恳希望读者能在本讲义的使用过程中及时向本人指出错误并提出宝贵建议.

陆俊

2016 年 8 月 30 日于

韩国高等研究所

目 录

第一章 基本概念 1
1.1 叶状结构的定义 1
1.2 叶状结构的经典例子 2
1.3 不变曲线 6
第二章 叶状结构的奇点 10
2.1 奇点重数 10
2.2 奇点解消 11
2.3 相切指标 17
2.4 Gomez-Mont-Seade-Verjovsky 指标 18
2.5 变分指标 21
2.6 Camacho-Sad 指标 22
2.7 Baum-Bott 指标 23
2.8 分界线定理 25
2.9 非多临界点 27
2.10 绕异性 29
第三章 有理首次积分 31
3.1 Darboux 定理 31
3.2 对数叶状结构与有理首次积分 32
第四章 叶状结构的双有理几何 35
4.1 相对极小模型与极小模型 35
4.2 没有极小模型的叶状结构 36
4.3 Miyaoka 有理性判则 38
4.4 Mcquillan 定理 40
4.5 小平维数 44
第五章 叶状结构的分类研究 46
5.1 全纯向量场诱导的叶状结构 46
5.2 小平维数为 0 的叶状结构 48
5.3 小平维数为 1 的叶状结构 49
5.4 正则叶状结构 51
5.5 一般型叶状结构 51
第六章 叶状结构的形变 52
本章习题 53
参考文献 59

第一章　基本概念

在这一章中, 我们将讨论微分方程中的叶化结构与向量丛的关系. 以下如无特别声明, X 均假设为光滑复射影曲面. 当然, 实际上, 许多概念和结论并不需要对 X 有如此强的条件. 具体内容可以参看 [Bru15].

1.1　叶状结构的定义

设 T_X 是 X 的全纯切丛, Ω_X 是余切丛. $L^{-1} \subseteq T_X$ 是 T_X 的极大子线丛, $s \in H^0(X, T_X \otimes L)$ 是全纯截面. 我们将 s 称为 X 上的**叶状结构** (Foliation), 通常记为 $\mathcal{F}$. L^{-1} 称为叶状结构 $\mathcal{F}$ 的**切丛** (Tangent bundle), 记为 $T_{\mathcal{F}}$. L 称为 $\mathcal{F}$ 的**余切丛** (Cotangent bundle), 记为 $T^{\vee}_{\mathcal{F}}$. 今后它也经常被称为 $\mathcal{F}$ 的**典范丛** (Canonical bundle), 记作 $K_{\mathcal{F}}$.

叶状结构也可以从局部上来描述. 考虑 X 的仿射开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, U_α 的局部坐标为 (x_α, y_α), $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$ 是 U_α 上的全纯向量场 (只有孤立零点). s_α 在局部上表示为

$$s_\alpha = \left(A(x_\alpha, y_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + B(x_\alpha, y_\alpha)\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \otimes \ell_\alpha,$$

这里 ℓ_α 是 $T^{\vee}_{\mathcal{F}}$ 的局部基.

有时我们用

$$v_\alpha = A(x_\alpha, y_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + B(x_\alpha, y_\alpha)\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \tag{1-1}$$

简单地代替 s_α. 此时, $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 在交集 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上满足转换关系

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v_\beta,$$

这里 $g_{\alpha\beta}$ 是线丛 $T^{\vee}_{\mathcal{F}}$ 的转移函数 (满足 $\ell_\alpha = g^{-1}_{\alpha\beta}\ell_\beta$).

由于 $\mathcal{O}_X$ 是 $T_X \otimes L$ 的极大子线丛 (由 s 诱导), 所以 s 的零点集 $Z(s)$ 是零维子概型. 我们通常记为 $Sing(\mathcal{F})$, 称为 $\mathcal{F}$ 的**奇点集** (Singular set). 从局部上看, 即

$$Sing(\mathcal{F}) \cap U_\alpha = Z(s_\alpha).$$

奇点集以外的点称为 $\mathcal{F}$ 的**正则点** (Regular point).

一个叶状结构 $\mathcal{F}$ 给出了正合列

$$0 \longrightarrow T_{\mathcal{F}} \longrightarrow T_X \longrightarrow I_{Z(s)}(N_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0,$$

这里 $I_{Z(s)}$ 是 $Sing(\mathcal{F})$ 上的理想层, $N_{\mathcal{F}}$ 是线丛, 称为 $\mathcal{F}$ 的**法丛** (Normal bundle) . $N^{\vee}_{\mathcal{F}}$ 称为 $\mathcal{F}$ 的**余法丛**. 对上述正合列做对偶, 即得

$$0 \longrightarrow N^{\vee}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow I_Z(K_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0. \tag{1-2}$$

由陈数公式, 我们有

$$K_X = K_{\mathcal{F}} \otimes N^{\vee}_{\mathcal{F}}. \tag{1-3}$$

通过上面的正合列, $\mathcal{F}$ 也可以对偶地理解为某个 1-形式截面

$$\omega = \{\omega_\alpha \otimes e_\alpha\}_{\alpha\in I} \in H^0(X, \Omega_X \otimes N_\mathcal{F}),$$

这里 e_α 是 $N_\mathcal{F}$ 的局部基,

$$\omega_\alpha = B(x_\alpha, y_\alpha)dx_\alpha - A(x_\alpha, y_\alpha)dy_\alpha. \tag{1-4}$$

注 1.1.1 设 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ 是 $N_\mathcal{F}$ 的转移函数 ($e_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{-1} e_\beta$). 我们可以把 $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 看成 $N_\mathcal{F}^\vee$ 的一组基. $N_\mathcal{F}^\vee$ 视为 Ω_X 的子层. ■

本节最后, 我们讨论同一个曲面上具有两个不同叶状结构的情形. 设 X 是光滑代数曲面, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是两个不同的叶状结构. 设

$$\omega_\alpha = A_\alpha dx_\alpha + B_\alpha dy_\alpha, \quad \omega'_\alpha = A'_\alpha dx_\alpha + B'_\alpha dy_\alpha$$

分别是 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 对应的 1-形式. 我们可以定义有效除子

$$D = \left\{A_\alpha B'_\alpha - A'_\alpha B_\alpha = 0\right\}.$$

D 被称为**相切除子** (Tangency divisor), 它有明确的几何意义: 对 $p \in D$, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 在 p 处不是横截交. 根据引理 **??** 及其证明, 实际上我们有

命题 1.1.1 ([Bru97b], **引理** 4) $\mathcal{O}_X(D) = N_\mathcal{F} \otimes K_\mathcal{G} = N_\mathcal{G} \otimes K_\mathcal{F}$.

注 1.1.2 D 实际上可以直接从引理 **??** 得到. ■

1.2 叶状结构的经典例子

下面两个例子是最常见的叶状结构.

例 1.2.1 (**纤维化**) 设 $f : X \to B$ 是代数曲面纤维化. 令

$$D(f) := \sum_F (F - F_{\mathrm{red}}),$$

这里 F 跑遍所有奇异纤维, F_{red} 是 F 的既约部分. 我们有叶状结构

$$\begin{aligned} K_\mathcal{F} &= K_{X/B} \otimes \mathcal{O}_X(-D(f)), \\ N_\mathcal{F} &= f^* T_B \otimes \mathcal{O}_X(-D(f)). \end{aligned}$$

它来自于微分场

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

为了让奇点集是零维的, 还需要除以某个公共因子, 这个公共因子对应了除子 $D(f)$.

特别地, 当 f 是椭圆纤维化时,

$$K_\mathcal{F} = f^*(f_*\omega_{X/B}) \otimes \mathcal{O}_X(\sum_F (F_{\mathrm{red}} - F_{\mathrm{prime}})),$$

这里 $F_{\mathrm{prime}} = \frac{1}{m}F$, m 是 F 中分支重数的最大公因子. ■

例 1.2.2 (射影平面上的叶状结构) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构. 考虑标准投影

$$\pi : \mathbb{C}^3 - \{0\} \to \mathbb{P}^2, \quad (X_0, X_1, X_2) \to [X_0, X_1, X_2] = (1, x_1, x_2).$$

那么 $\mathcal{F}$ 对应的微分场拉回到 $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ 上, 可写为

$$\omega = \sum_{i=0}^{2} A_i(X_0, X_1, X_2) dX_i,$$

这里 A_i 都是 ν 次齐次多项式, 没有公共因子且满足 $\sum\limits_{i=0}^{2} X_i A_i = 0$. 我们定义 $\deg \omega := \nu$. $\mathcal{F}$ 对应的微分场在仿射坐标卡上可写为

$$\begin{aligned}
\omega_0 &:= A_1(1, x_1, x_2)dx_1 + A_2(1, x_1, x_2)dx_2, \\
\omega_1 &:= A_0(y_0, 1, y_2)dy_0 + A_2(y_0, 1, y_2)dy_2, \\
\omega_2 &:= A_0(z_0, z_1, 1)dz_0 + A_1(z_0, z_1, 1)dz_1.
\end{aligned}$$

计算转移函数

$$\omega_i = \left(\frac{X_j}{X_i}\right)^{\nu+1} \omega_j.$$

因此 $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\nu + 1)$, 从而 $K_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\nu - 2)$. 我们定义 $\mathcal{F}$ 的次数(Degree)为 $\deg \mathcal{F} := \nu - 1$.

ω 在仿射坐标卡上也可以写成如下形式 (参见[GMOB89])

$$(P(x, y) + xR(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (Q(x, y) + yR(x, y)) \frac{\partial}{\partial y} \in H^0(X, T_X(d - 1)), \tag{1-5}$$

这里 $d = \deg \mathcal{F}$, R 是 d 次齐次多项式, P, Q 是次数不超过 d 的多项式.当 $\deg \mathcal{F} = 0$ 时, 通过选取合适的坐标, $\mathcal{F}$ 可以写为标准形式

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

我们可以直接将式 (1-5)延拓到无穷远直线 L_∞ 上, 即考虑坐标变换

$$x = \frac{1}{v}, \quad y = \frac{u}{v}.$$

于是 $\mathcal{F}$ 在无穷远直线 $v = 0$ 附近表达为

$$\left(v^d Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) - uv^d P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)\right) \frac{\partial}{\partial u} - \left(v^{d+1} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + R(1, u)\right) \frac{\partial}{\partial v}.$$

类似地, 我们也可以给出有理曲面上的叶状结构表达式 (习题 6.21). ■

此外, 我们可以通过对曲面光滑点的爆发, 从已知的叶状结构诱导出新的叶状结构. 这是研究叶状结构的一种常用方法.

例 1.2.3 (通过爆发得到的叶状结构) 设 $p \in X$, $\sigma : (\widetilde{X}, E) \to (X, p)$ 是关于 p 点的爆发, E 是例外曲线. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构. 我们希望这个结构能够搬到 $\widetilde{X}$ 上. 考虑拉回 $\sigma^*\omega := \{\sigma^*\omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$. 但此时 $\sigma^*\omega$ 的零点集可能包含 E. 不妨设 $l(p) = \mathrm{ord}_E \sigma^*\omega$. 从上述拉回中去掉 $l(p)E$ 后, 就可构造出 $\widetilde{X}$ 上的叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}$:

$$\tilde{\omega} \in H^0\left(\widetilde{X}, \Omega_{\widetilde{X}} \otimes \sigma^* N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-l(p)E)\right).$$

此时

$$N_{\widetilde{\mathcal{F}}} = \sigma^* N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-l(p)E), \quad K_{\widetilde{\mathcal{F}}} = \sigma^* K_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}((1-l(p))E). \tag{1-6}$$

因此, 如果从切丛的角度看, 相当于从拉回 $\sigma^* v = \{\sigma^* v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中去除 $(l(p)-1)E$ 得到 $\widetilde{\mathcal{F}}$. 今后为了方便, 我们也常常将 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 记为 $\sigma^*\mathcal{F}$. ■

例 1.2.4 (Riccati **叶状结构**) 设 $\varphi : X \to C$ 是一个直纹面 (未必相对极小), $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, 使得 $\mathcal{F}$ 与 φ 的一般纤维横截相交. 我们称这样的 $\mathcal{F}$ 为 Riccati 叶状结构. 有时也说 $\mathcal{F}$ 关于 φ 是 Riccati 的, 或 φ 适配于 $\mathcal{F}$.

由 $\mathcal{F}$ 的横截性, $\mathcal{F}$ 限制在一般纤维 F 上, 自然诱导了 F 的法丛 $\mathcal{O}_F(F)$. 局部上看, 就是把 $\{v_\alpha\}$ 理解成法丛的基 (横截性保证了基的非退化性), 它们满足关系 $v_\alpha = g_{\alpha\beta} v_\beta$. 因此 F 的法丛同构于 $T_{\mathcal{F}}|_F$. 这就推出 $T_{\mathcal{F}} F = 0$, 即 $K_{\mathcal{F}} F = 0$. 因而 $N_{\mathcal{F}} F = 2$.

不妨假设 φ 是相对极小的 (即几何直纹面). 设 F_0 是 φ 的一条纤维, 它不是 $\mathcal{F}$-横截的. 考虑 F 的管状邻域 $\Delta \times \mathbb{P}^1$, 这里 Δ 是圆盘, F 是其圆心的拉回, (z, w) 是局部坐标. 设 $p = (0,0)$ 是 $\mathcal{F}$ 的奇点. 后面将证明 $\mathcal{F}$ 可在 $\Delta \times \mathbb{P}^1$ 上写为

$$\omega = (a(z)w^2 + b(z)w + zc(z))dz + zd(z)dw, \tag{1-7}$$

这里 a, b, c, d 皆为 Δ 上的全纯函数. $\mathcal{F}$ 在 $w = \infty$ 处的表达式可以由坐标变换 $w = \frac{1}{u}$ 得到, 即

$$\omega = (a(z) + b(z)u + zc(z)u^2)dz - zd(z)du.$$

(见例 2.4.3 的讨论.) ■

例 1.2.5 (**湍流叶状结构**) 设 $\varphi : X \to C$ 是椭圆纤维化 (未必相对极小), $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, 使得 $\mathcal{F}$ 与 φ 的一般纤维横截相交. 我们称这样的 $\mathcal{F}$ 为湍流叶状结构 (Turbulent Foliation). 与 Riccati 叶状结构类似的讨论, 此时 $K_{\mathcal{F}} F = 0$. 反过来, 若一个叶状结构 $\mathcal{G}$ 满足 $K_{\mathcal{G}} F = 0$, 则 $\mathcal{G}$ 要么是湍流叶状结构, 要么与 φ 一致. ■

例 1.2.6 (**非常特殊叶状结构** [Bru15]) 考虑 $X = \mathbb{P}^2$ 上的群作用

$$G : [X, Y, Z] \to [Z, X, Y]$$

以及线性叶状结构 $\mathcal{L}$

$$v = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y},$$

这里 $(x, y) = (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ 是仿射坐标 ($\mathcal{L}$ 可以通过齐次化延拓到整个平面上). G 在 $\mathcal{L}$ 上的诱导作用为

$$Gv = \lambda_2 x \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_2 - \lambda_1) y \frac{\partial}{\partial y}.$$

如果 $\mathcal{L}$ 能保持 $v \wedge Gv = 0$ 处处成立, 我们就说 $\mathcal{L}$ 是 G-不变的. 由直接计算可知, G-不变的充要条件是 $\lambda_1/\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$. 因此 G 不变的叶状结构 L 即为

$$x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}) y \frac{\partial}{\partial y}.$$

实际上这两种叶状结构只相差一个坐标变换 $(x, y) \to (y, x)$. 从这个角度说, 它是唯一的.

现在考虑商簇 $Y_0 = \mathbb{P}^2/G$. G 在 $\mathbb{P}^2$ 上有三个不动点

$$q_1 = [1, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})], \quad q_2 = [1, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})], \quad q_3 = [1,1,1].$$

它们对应了 Y_0 上的三个 A_2 型有理奇点 Q_1, Q_2, Q_3. 考虑它们的极小解消 $\rho : Y \to Y_0$, 例外集 $\rho^{-1}(Q_i) = D_i + E_i$ 是两条 (-2)-曲线组成的链. 另一方面, $\mathcal{L}$ 有三个奇点

$$p_1 = [0, 0, 1], \quad p_2 = [1, 0, 0], \quad p_3 = [0, 1, 0].$$

它们都映到 Y 上一点 P. 过 p_i 中两点的直线共有三条, 它们也都映到 Y 中的曲线 C. $C^2 = 3$ 且有唯一结点 P.

$\mathcal{L}$ 自然诱导了 Y_0 上的叶状结构 $\mathcal{F}_0$, 拉回到 Y 上, 则得叶状结构 $\mathcal{F}$, 称之为非常特殊叶状结构 (Very special foliation). 根据 [Per05] 的计算结果, 非常叶状结构双有理于平面上的如下二次叶状结构

$$\omega = X_1(X_0X_1 + X_1X_2 - 2X_2^2)dX_0 + X_0(2X_1X_2 - X_2^2 - X_0X_1)dX_1 + 3X_1X_0(X_2 - X_1)dX_2. \quad (1\text{-}8)$$

群作用诱导的三次覆盖双有理于如下三次有理映射

$$\Phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [L_0^3, L_0L_1L_2, L_2^3],$$

这里 $L_i = X_0 + \lambda^i X_1 + \lambda^{-i} X_2$, $\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. ■

例 1.2.7 (Kronecker **叶状结构**) 设 $X = \mathbb{C}^2/\bigwedge$ 是 Abel 曲面. 此时 $T_X \cong \Omega_X \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$. 因此存在两个整体的全纯切向量场 v_1, v_2, 它们处处线性无关. 任何整体全纯切向量场都可以写成 $c_1v_1 + c_2v_2$ $(c_i \in \mathbb{C})$. 这样的叶状结构也可以看成由 $\mathbb{C}^2$ 上具有相同斜率 θ 的直线诱导 (取适当的 v_1, v_2 可使 $\theta = \frac{c_1}{c_2}$). 当 θ 是有理数时, 这些直线在 X 上的像是椭圆曲线, 因而 $\mathcal{F}$ 由椭圆纤维丛诱导. 当 θ 不是有理数时, 这些直线的投影像不是 X 上的紧曲线, 而且在 X 中是稠密的. 此时 $\mathcal{F}$ 被称为 Kronecker 叶状结构. ■

例 1.2.8 (Lins Neto **叶状结构** [Mov15]) 设 $\mathcal{F}_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{P}^1)$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构, 由如下微分场得到

$$\omega_\lambda = (X_1^3 - X_2^3)(\lambda X_0^2 - X_1X_2)dX_0 + (X_2^3 - X_0^3)(\lambda X_1^2 - X_0X_2)dX_1 + (X_0^3 - X_1^3)(\lambda X_2^2 - X_0X_1)dX_0.$$

这是 4 次叶状结构. ■

例 1.2.9 (Jouanolou **叶状结构** [MoVi09]) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上由如下微分场

$$\omega = (X_1X_0^d - X_2^{d+1})dX_0 + (X_2X_1^d - X_0^d)dX_1 + (X_0X_2^d - X_1^d)dX_2.$$

生成的 d 次叶状结构. 考虑循环群 $G = \{g^k | k = 0, 1, \ldots, d^2 + d\}$ (这里 g 是 $d^2 + d + 1$ 次本原单位根) 在 $\mathbb{P}^2$ 上的群作用

$$g : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [X_0, X_1, X_2] \to [X_0, g^{d+1}X_1, gX_2].$$

这个群作用下的不动点恰好是 $p_1 = [1, 0, 0]$, $p_2 = [0, 1, 0]$, $p_3 = [0, 0, 1]$. 因为 $g^*\omega = g^{d+1}\omega$, 所以 $\mathcal{F}$ 在 G 作用下不变. 它的奇点集是

$$Sing(\mathcal{F}) = \{[1, g^k, g^{-dk}] | k = 0, \ldots, d^2 + d\}.$$

G 可迁地作用在该奇点集上. ■

1.3 不变曲线

定义 1.3.1 设 $\mathcal{F}$ 是叶状结构, C 是不可约曲线. 如果对任一点 $p \in C$, $\mathcal{F}$ 在 p 处的向量恰好与 C 相切, 我们就称 C 是 $\mathcal{F}$-不变的 ($\mathcal{F}$-invariant).

$\mathcal{F}$ 在一点 p 处的分界线 (Separatrix) 是指 p 的某小邻域内的全纯定义的不可约曲线 C (允许奇异), 使得 C 经过 p 且是 $\mathcal{F}$-不变的. 若有无数条分界线通过 p, 我们就称 p 是多临界点 (Dicritical singularity).

利用局部表示 (1-1) 和 (1-4), 我们也可以给出 $\mathcal{F}$-不变曲线的其他描述.

命题 1.3.1 设 C 是不可约曲线, 以下条件彼此等价:

(1) C 是 $\mathcal{F}$ 不变的.

(2) 设 $f_\alpha = 0$ 是 C 在 U_α 上的局部方程, 它满足 $f_\alpha \mid v_\alpha(f_\alpha)$.

(3) f_α 是微分方程 $\omega_\alpha = 0$ 的解.

(4) 存在全纯函数 g_α, h_α 及全纯 1-形式 η_α, 满足 $\gcd(h_\alpha, f_\alpha) = \gcd(g_\alpha, f_\alpha) = 1$ 以及

$$g_\alpha \omega_\alpha = h_\alpha df_\alpha + f_\alpha \eta_\alpha. \tag{1-9}$$

(5) $df_\alpha \wedge \omega_\alpha = f_\alpha \tilde{\eta}_\alpha$, 这里 $\tilde{\eta}_\alpha$ 是全纯 2-形式.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 我们只需要证明, 对一般点 $p \in C$, 都有

$$A(p)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\Big|_p + B(p)\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\Big|_p = 0.$$

设 C 的 $p = (0,0)$ 处的局部参数方程

$$x_a = x_\alpha(t), \quad y_\alpha = y_\alpha(t).$$

于是 C 在 $p = (x_\alpha(t), y_\alpha(t))$ 处的切方向为 $(x'_\alpha(t), y'_\alpha(t))$. 因此

$$A/x'_\alpha(t) = B/y'_\alpha(t) \tag{1-10}$$

再结合

$$0 = f'(x_\alpha(t), y_\alpha(t)) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(t) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}(t) \tag{1-11}$$

即得所需.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 此时已知

$$A(x_\alpha(t), y_\alpha(t))\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}(t) + B(x_\alpha(t), y_\alpha(t))\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}(t) \equiv 0. \tag{1-12}$$

结合式 (1-11) 可得式 (1-10). 由此推出

$$B(x_\alpha(t), y_\alpha(t))\frac{dx_\alpha}{dt} - A(x_\alpha(t), y_\alpha(t))\frac{dy_\alpha}{dt} \equiv 0, \tag{1-13}$$

即 f_α 是微分方程 $\omega_\alpha = 0$ 的解.

(3) $\Longrightarrow$ (4) 设

$$w_\alpha = \frac{A_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + B_\alpha \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}}{f_\alpha}.$$

此时已知式 (1-13) 成立, 因而结合式 (1-11) 可知式 (1-12) 成立, 即 w_α 是全纯的. 令

$$\begin{cases} g_\alpha = u_\alpha \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} - k_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \\ h_\alpha = -u_\alpha A_\alpha - k_\alpha B_\alpha \\ \eta_\alpha = w_\alpha(u_\alpha dx_\alpha + k_\alpha dy_\alpha), \end{cases}$$

这里 u_α, k_α 是全纯函数. 取适当的 u_α, k_α, 可使 $\gcd(h_\alpha, f_\alpha) = \gcd(g_\alpha, f_\alpha) = 1$.

(4) $\Longrightarrow$ (5) 此时 $df_\alpha \wedge \omega_\alpha = f_\alpha \frac{df_\alpha \wedge \eta}{g_\alpha}$. 注意到左边是全纯的, $\gcd(f_\alpha, g_\alpha) = 1$, 因而 $\tilde{\eta}_\alpha := \frac{df_\alpha \wedge \eta}{g_\alpha}$ 是全纯 2-形式.

(5) $\Longrightarrow$ (1) 对 $p = (0,0) \in C$, $\omega(p) \wedge df|_p = f(p)\tilde{\eta} = 0$, 因此 $B(p)/\frac{\partial f}{\partial x}\big|_p = -A(p)/\frac{\partial f}{\partial y}\big|_p$. 由式 (1-11), 可知 C 在 $p = (0,0)$ 处的切向量 $(x'(0), y'(0))$ 与 $A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$ 方向一致. ■

例 1.3.1 (1) $\omega = ydx - xdy$ (相应地, $v = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$) 在 $p = (0,0)$ 处的分界线有无数条, 它们定义为 $f(x,y) := y - \lambda x = 0$ ($\lambda \in \mathbb{P}^1$). 此时 $v(f) = f$.

(2) $\omega = 2ydx - 3xdy$ (相应地, $v = 3x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$) 在 $p = (0,0)$ 处也有无数条分界线, 它们定义为 $f(x,y) := x^2 - \lambda y^3 = 0$ ($\lambda \in \mathbb{P}^1$). 此时 $v(f) = 6f$.

(3) $\omega = nydx + mxdy$ (n, m 是正整数) 仅有两条分界线过 $p = (0,0)$, 即 $x = 0$ 及 $y = 0$. ■

例 1.3.2 在例 1.2.2 中, 无穷远直线 $L_\infty = \{X_0 = 0\}$ 是 $\mathcal{F}$-不变当且仅当 $R \equiv 0$. ■

例 1.3.3 设 m, n 是正整数. 考虑 1 次平面叶状结构 $\mathcal{F}$:

$$-(n+m)X_1X_2dX_0 + nX_0X_2dX_1 + mX_0X_1dX_2 = 0.$$

所有的 $\mathcal{F}$-不变曲线可表为

$$X_1^n X_2^m - \lambda X_0^{n+m} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{P}^1.$$

其中包含三条 $\mathcal{F}$-不变的直线 $X_i = 0$ ($i = 0, 1, 2$). ■

例 1.3.4 (**非常特殊叶状结构的不变曲线**) 在例 1.2.6 的记号下, D_i, E_i 和 C 都是 $\mathcal{F}$-不变曲线. 除此之外, 没有其他 $\mathcal{F}$-不变曲线 (因为 $\mathcal{L}$ 仅有三条直线是 $\mathcal{F}$-不变的). 此外, P 是 $\mathcal{F}$ 在 C 上唯一的奇点.

如果我们采用表达式 (1-8), 那么 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上的不变曲线仅有直线 $X = 0$ 与 $Z = 0$, 以及三次曲线 $F = 0$, 这里

$$F := XZ^2 + X^2Z + Y^3 - 3XYZ.$$

由计算可知, 在仿射坐标下, $\omega \wedge df = f \cdot (6x - 3y)dx \wedge dy$, 这里 $f(x,y) = F(x,y,1)$. ■

例 1.3.5 (**叶状结构的拉回**) 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $\pi : Y \to X$ 是一般有限态射. 设 ω 是 $\mathcal{F}$ 对应的微分场. 那么 $\pi^*\omega$ 给出了 Y 上的叶状结构 $\mathcal{G}$, 通常记为 $\pi^*\mathcal{F}$. 现在我们分析 $\pi^*\mathcal{F}$ 的典范丛和法丛. 设 C 是分歧轨迹, 我们取一般点 $p \in C$. 考虑 p 附近的小邻域 U, 不妨设 C 的局部方程为 $x = 0$.

如果 C 在 U 内不是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么不妨设 $\omega = dy$. 此时 $\pi^*(\omega|_U)$ 仍为全纯的, 并且没有一维零点集. 因而在局部上有 $N_{\mathcal{G}}|_{\pi^{-1}(U)} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}|_U)$. 注意

$$K_Y|_{\pi^{-1}(U)} = \pi^*(K_X|_U) + (k-1)C|_{\pi^{-1}(U)},$$

这里 k 是 C 的分歧指数. 因而

$$K_{\mathcal{G}}|_{\pi^{-1}(U)} = \pi^*(K_{\mathcal{F}}|_U) + (k-1)C|_{\pi^{-1}(U)}.$$

如果 C 在 U 内是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么不妨设 $\omega = dx$, 并且 π 在 C 上完全分歧, 局部方程 $z^k = x$. 因而 $\pi^*\omega = kz^{k-1}dz$ 有一维零点除子 $(k-1)C$, 故

$$N_{\mathcal{G}}^\vee|_{\pi^{-1}(U)} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}^\vee|_U) + (k-1)C|_{\pi^{-1}(U)}, \quad K_{\mathcal{G}} = \pi^*K_{\mathcal{F}}.$$

整体情形下, 我们可以找到有效除子 E, 使得 $N_{\mathcal{G}}^\vee = \pi^*N_{\mathcal{F}}^\vee + E$. ■

例 1.3.6 (Lins Neto **叶状结构的不变曲线**) 考虑例 1.2.8 的 Lins Neto 叶状结构 $\mathcal{F}_\lambda$. 设 L_{ijk} 是由方程 $X_i - \omega^k X_j = 0$ 定义的直线 $(i < j)$, 这里 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$. 可以验证, L_{ijk} 是 $\mathcal{F}_\lambda$-不变曲线. 这九条直线共有 12 个交点

$$p_{ij} = [1, \omega^i, \omega^j]\ (0 \le i, j \le 2), \quad q_0 = [1,0,0], \quad q_1 = [0,1,0], \quad q_2 = [0,0,1].$$

这些交点都是 $\mathcal{F}$ 的奇点. 对每个 p_{ij}, 恰有三条直线 $L_{01,-i}, L_{02,-j}, L_{12,i-j}$ 经过它. 每条直线 L_{ijk} 上恰有四个交点. 为了后面讨论方便, 我们把这些交点分成四类:

$$P_0 = \{p_{00}, p_{12}, p_{21}\}, \quad P_1 = \{p_{01}, p_{10}, p_{22}\}, \quad P_2 = \{p_{02}, p_{11}, p_{02}\}, \quad Q = \{q_1, q_2, q_3\}.$$

它们可以通过平面自同构变换到彼此.

当考虑 $\lambda = \infty$ 的情形. 此时 $\omega \wedge dH = 0$, 这里 $H = \frac{y^3-1}{x^3-1}$. 因此 $\mathcal{F}$ 有无数 $\mathcal{F}$-不变曲线, $H = c$ $(c \in \mathbb{P}^1)$. 类似地, 对 $\lambda = \omega^k$ 时, $\omega \wedge dH_k = 0$, 这里

$$H_k = \frac{(1-x)(\omega^k - y)(\omega^k x - y)}{(\omega - x)(\omega^{k+2} - y)(\omega^{k+1}x - y)}.$$

$\mathcal{F}$ 的所有 $\mathcal{F}$-不变曲线为 $H_k = c$ $(c \in \mathbb{P}^1)$. ■

对一个整体全纯 1-形式 η, 如果它在任何点的分界线上恒为零, 我们就说 η 在 $\mathcal{F}$ 上恒为零. 根据注记 1.1.1, 这等价于说 η 落在映射 $H^0(X, N_{\mathcal{F}}^\vee) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X)$ 的像中 (这个单射来自于正合列 (1-2)). 我们有下面的有趣结论.

命题 1.3.2 *设 $\mathcal{F}$ 是曲面 X 上的叶状结构, 且 $q(X) > 0$, 那么以下情形之一成立:*
(1) 存在一个整体全纯 1-形式 $\omega \in H^0(X, \Omega_X)$, 使得 ω 在 $\mathcal{F}$ 上不恒为零. 这推出 $h^0(X, K_{\mathcal{F}}) > 0$.
(2) 任何整体 1-形式 ω 都在 $\mathcal{F}$ 上恒为零. 此时 Albanese 映射 $\alpha : X \to Alb(X)$ 是纤维化 (称为 Albanese 纤维化) 并且 $\mathcal{F}$ 由 Albanese 纤维化诱导.

证明 我们假设情形 (1) 不成立. 那么 $H^0(X, N_{\mathcal{F}}^\vee) \cong H^0(X, \Omega_X)$, 也就是任何整体 1-形式 ω 都在 $\mathcal{F}$ 上恒为零. 取定一点 q, 考虑 Albanese 映射

$$\alpha : X \longrightarrow Alb(X), \quad x \to \int_q^x (\cdot).$$

对任何分界线 C (局部或整体) 以及任何两点 $x, y \in C$, 由于任何全纯 1 形式都在分界线上消失,

所以它们沿着道路 C 从 y 到 x 积分均为零. 这就推得

$$\alpha(x) - \alpha(y) = \int_y^x (\cdot) = 0.$$

即 $\alpha(x) = \alpha(y)$. 这样, C 被 α 收缩. 对 $\mathcal{F}$ 的每个光滑点, 都有分界线通过它, 因而 $\dim \mathrm{Im}\alpha \leq= 1$. 注意到 $q(X) > 0$, 因而 α 不是平凡的 (由命题 **??** (3)), 所以 α 是纤维化, $\mathcal{F}$ 由 α 诱导. ■

推论 1.3.1 *如果 $q(X) > 0$, 那么当以下条件之一成立时, $\mathcal{F}$ 必由 Albanese 纤维诱导:*
(1) $h^0(X, K_{\mathcal{F}}) = 0$;
(2) $K_{\mathcal{F}} \equiv 0$ *且* $Sing(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

证明 在任何一种条件下, 命题 1.3.2 的情形 (2) 都成立. ■

本节最后, 我们讨论带有纤维化结构的曲面上的叶状结构.

命题 1.3.3 *设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $\varphi : X \to B$ 是纤维化, 且它诱导的叶状结构 $\mathcal{G}$ 不等于 $\mathcal{F}$. 那么*

$$K_{\mathcal{F}} = \varphi^* K_B + D + D(\varphi),$$

这里 D 是有效除子, 使得对任何 $p \in D$, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 在 p 处不是横截交.

特别地, 如果 $\mathcal{F}$ 与 f 的一般纤维横截交, 那么 D 的支集是落在 f 的纤维中的 $\mathcal{F}$-不变曲线.

证明 直接来自于命题 1.1.1. ■

第二章　叶状结构的奇点

2.1　奇点重数

在式 (1-1) 或 (1-4) 中, 我们规定 $\mathcal{F}$ 在 $p=(0,0)$ 处的重数 (Multiplicity)

$$m(p) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,p}/\langle A, B\rangle.$$

在整体上, 则可定义

$$m(\mathcal{F}) := \sum_{p\in Sing(\mathcal{F})} m(p).$$

由零维子概型的次数定义, 实际上

$$m(\mathcal{F}) = \deg Sing(\mathcal{F}).$$

因此由习题 **??** 以及式 (1-3) 可得

$$\begin{aligned} m(\mathcal{F}) &= K_{\mathcal{F}}\cdot K_{\mathcal{F}} - K_{\mathcal{F}}\cdot K_X + c_2(X) \\ &= N_{\mathcal{F}}\cdot N_{\mathcal{F}} + N_{\mathcal{F}}\cdot K_X + c_2(X) \\ &= c_2(X) + K_{\mathcal{F}}\cdot N_{\mathcal{F}}. \end{aligned} \tag{2-1}$$

设 $n = mult_p(A)$, $m = mult_p(B)$. 我们定义 $a(p) = \min(n,m)$. 它是 ω 在 p 处零点阶数, 也常被记为 $\mathrm{ord}_p(\mathcal{F})$, 并称作 $\mathcal{F}$ 在 p 处的代数重数 (Algebraic multiplicity).

由式(2-1), 我们立刻得到如下经典结论.

定理 2.1.1 (Darboux **定理** [Dar78])　对平面上的 d 次叶状结构 $\mathcal{F}$, 我们有

$$m(\mathcal{F}) = d^2 + d + 1.$$

例 2.1.1　我们构造两例平面上的 1 次叶状结构 $\mathcal{F}$. 根据 Darboux 定理, $m(\mathcal{F}) = 3$.
(1) $\mathcal{F}$ 由如下微分场诱导

$$\omega = X_1X_2dX_0 + 2X_0X_2dX_1 - 3X_0X_1dX_2.$$

它恰有三个奇点

$$P=[1,0,0],\quad Q=[0,1,1],\quad R=[0,0,1].$$

(2) $\mathcal{F}$ 取为

$$\omega = X_2^2dX_0 + X_1X_2dX_1 - (X_1^2 + X_0X_2)dX_2.$$

此时仅有一个奇点 $P=[1,0,0]$. ■

命题 2.1.1　设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $\sigma:\widetilde{X}\to X$ 是爆发, 那么
(1) $m(\sigma^*\mathcal{F}) - N^2_{\sigma^*\mathcal{F}} > m(\mathcal{F}) - N^2_{\mathcal{F}}$.
(2) 如果 X 是一般型极小曲面, 那么 $m(\mathcal{F}) - N^2_{\mathcal{F}} \geq 0$.

证明 (1) 由例 1.2.3 及式 (2-1),

$$m(\sigma^*\mathcal{F}) - N^2_{\sigma^*\mathcal{F}} = m(\mathcal{F}) - N^2_{\mathcal{F}} + l(p) + 1.$$

由此即得结论.

(2) 若 $N^2_{\mathcal{F}} \leq 0$, 则结论显然. 不妨设 $N^2_{\mathcal{F}} > 0$. 由 Riemann-Roch 定理,

$$h^0(X, (N^\vee_{\mathcal{F}})^{\otimes n}) + h^0(X, K_X \otimes N^{\otimes n}_{\mathcal{F}}) \geq O(n^2).$$

由 Bogomolov 定理 **??**, $h^0(X, (N^\vee_{\mathcal{F}})^{\otimes n}) = O(n)$, 这就推出 $h^0(X, K_X \otimes N^{\otimes n}_{\mathcal{F}}) > 0$ (n 充分大). 因此 $K_X(K_X + nN_{\mathcal{F}}) \geq 0$. 这就有 $K_X N_{\mathcal{F}} \geq 0$. 现在, 我们有 $m(\mathcal{F}) - N^2_{\mathcal{F}} = c_2(X) + N_{\mathcal{F}} K_X \geq 0$.■

2.2 奇点解消

基于例 1.2.3, 我们从局部上来描述叶状结构奇点爆发. 令 $t = \frac{y}{x}$. 我们有

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{x^{l(p)}}\Big((B(x, xt) - tA(x, xt))dx - xA(x, xt)dt\Big).$$

设 $n = mult_p(A)$, $m = mult_p(B)$. 我们回顾 $\mathcal{F}$ 在 p 处的代数重数 $a(p) = \min(n, m)$. 记

$$A(x, xt) = x^n \widetilde{A}(x, t), \quad B(x, xt) = x^m \widetilde{B}(x, t).$$

于是

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{x^{l(p)-a(p)}}\Big((x^{m-a(p)}\widetilde{B}(x, t) - tx^{n-a(p)}\widetilde{A}(x, t))dx - x^{n+1-a(p)}\widetilde{A}(x, t)dt\Big). \tag{2-2}$$

因此

$$l(p) = \begin{cases} a(p) + 1, \text{ 若 } m = n \text{ 且 } \mathrm{ord}_x(\widetilde{B} - t\widetilde{A}) > 0, \\ a(p), \quad \text{其他情形.} \end{cases}$$

另一种等价的说法是: $l(p) = a(p)$ 当且仅当 E 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的 (留给读者验证).

如果我们需要考虑 $\widetilde{F}$ 在 $t = \infty$ 附近的性态, 可以利用 $s = \frac{x}{y}$ (即 $s = \frac{1}{t}$) 来做爆发.

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{y^{l(p)}}\Big(- (A(ys, y) - sB(ys, y))dy + yB(ys, y)ds\Big).$$

$s = 0$ 处的点就是 $t = \infty$ 处的点. 进一步设

$$A(ys, y) = y^n A'(y, s), \quad B(ys, y) = y^m B'(y, s).$$

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{y^{l(p)-a(p)}}\Big(- (y^{n-a(p)}A'(y, s) - sy^{m-a(p)}B'(y, s))dy + y^{m+1-a(p)}B'(y, s)ds\Big). \tag{2-3}$$

例 2.2.1 考虑原点 p 附近的叶状结构 $\omega = \lambda ydx - xdy$ (λ 是非零常数) 的爆发. 当 $\lambda \neq 1$ 时,

$$\tilde{\omega} = (\lambda - 1)tdx - xdt = (\lambda - 1)sdy + \lambda yds.$$

例外曲线 E 上恰有两个奇点 $t = 0, \infty$, 并且 $l(p) = a(p) = m(p) = 1$.

当 $\lambda = 1$ 时,

$$\tilde{\omega} = -dt = ds.$$

此时 E 上没有奇点, 并且 $l(p) = 2$, $a(p) = m(p) = 1$. ■

命题 2.2.1 (Van den Essen **重数公式**) 设 $p_1,\cdots,p_r$ 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 在 E 上的所有奇点. 那么

$$\sum_{i=1}^{r} m(p_i) = m(p) - l(p)^2 + l(p) + 1.$$

证明 这个等式直接来自于式 (1-6) 和式 (2-1). 此时有整体表达式

$$m(\widetilde{\mathcal{F}}) = m(\mathcal{F}) - l(p)^2 + l(p) + 1.$$

下面我们直接从局部上重新证明该公式. 设 $n = mult_p(A)$, $m = mult_p(B)$. 我们需要分情形讨论.

情形 1: $m > n$. 由式 (2-2) 及式 (2-3),

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= (x^{m-n}\widetilde{B}(x,t) - t\widetilde{A}(x,t))dx - x\widetilde{A}(x,t)dt\\ &= -(A'(y,s) - sy^{m-n}B'(y,s))dy + y^{m+1-n}B'(y,s)ds.\end{aligned}$$

于是 Van den Essen 公式的左边就是相交数之和

$$(A' - sy^{m-n}B', y^{m+1-n}B')_{s=0} + (x^{m-n}\widetilde{B} - t\widetilde{A}, x\widetilde{A})_{s\neq 0}.$$

利用相交数的计算法则, 上式等于

$$(A', B')_{s=0} + (m+1-n)(A', y)_{s=0} + (m-n)(x, \widetilde{A})_{s\neq 0} + (\widetilde{A}, \widetilde{B})_{s\neq 0} + (x, \widetilde{A})_{s\neq 0} + (t, x)_{t=0}.$$

注意到

$$(A', y)_{s=0} + (x, \widetilde{A})_{s\neq 0} = n, \quad (A', B')_{s=0} + (\widetilde{A}, \widetilde{B})_{s\neq 0} = (A, B) - nm = m(p) - nm,$$

我们得到

$$\sum_{i=1}^{r} m(p_i) = m(p) - nm + (m+1-n)n = m(p) - n^2 + n + 1.$$

公式得证.

情形 2: $m < n$. 类似情形 1 的证明.

情形 3. $m = n$ 且 $l(p) = n$. 此时

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= (\widetilde{B}(x,t) - t\widetilde{A}(x,t))dx - x\widetilde{A}(x,t)dt\\ &= -(A'(y,s) - sB'(y,s))dy + yB'(y,s)ds.\end{aligned}$$

类似上面的讨论, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} m(p_i) &= (A' - sB', yB')_{s=0} + (\widetilde{B} - t\widetilde{A}, x\widetilde{A})_{s\neq 0}\\ &= (A' - sB', y)_{s=0} + (\widetilde{B} - t\widetilde{A}, x)_{s\neq 0} + m(p) - n^2\\ &= mult_p(yA - xB) + m(p) - n^2\\ &= m(p) - n^2 + n + 1.\end{aligned}$$

情形 4. $m = n$ 且 $l(p) = n + 1$. 此时

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= (\widetilde{B}(x,t) - t\widetilde{A}(x,t))\tfrac{dx}{x} - \widetilde{A}(x,t)dt\\ &= -(A'(y,s) - sB'(y,s))\tfrac{dy}{y} + B'(y,s)ds.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r} m(p_i) &= \left(\frac{A'-sB'}{y}, B'\right)_{s=0} + \left(\frac{\widetilde{B}-t\widetilde{A}}{x}, \widetilde{A}\right)_{s\neq 0} \\ &= -(B', y)_{s=0} - (\widetilde{A}, x)_{s\neq 0} + m(p) - n^2 \\ &= -(B', y)_{s=0} + (A', y)_{s=0} - n + m(p) - n^2 \\ &= -\deg_s B'(0,s) + \deg_s A'(0,s) + m(p) - n^2 - n \\ &= m(p) - n^2 - n + 1 \\ &= m(p) - l(p)^2 + l(p) + 1.\end{aligned}$$

至此, 我们完成了证明. ■

推论 2.2.1 *存在有限步的爆发 $\sigma : \widetilde{X} \to X$, 使得叶状结构的拉回 $\widetilde{F}$ 的所有奇点 p 都满足 $l(p) = 1$.*

证明 由 Van den Essen 重数公式, 当 $l(p) \geq 2$ 时, 总有严格的不等式 $m(p_i) < m(p)$. 因此我们可以做有限步爆发, 使得所有奇点 p 都满足 $l(p) = 1$. ■

下面我们考察 $l(p) = 1$ 的奇点. 设

$$Dv_\alpha(p) = (ax_\alpha + by_\alpha)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + (cx_\alpha + dy_\alpha)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

是 $v_\alpha = A\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + B\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ 在奇点 p 处的线性部分. 因为 $l(p) = 1$, 所以 $Dv(p)$ 非零. 它对应矩阵

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

M 有两个特征值 $\lambda_{1\alpha}, \lambda_{2\alpha}$. 在坐标转换中, $M_\alpha = g_{\alpha\beta}M_\beta$, 因而 $\lambda_{i\alpha} = g_{\alpha\beta}\lambda_{i\beta}$. 如果两个特征值不全为零 (比如 $\lambda_{2\alpha} \neq 0$), 我们令 $\lambda_\alpha = \frac{\lambda_{1\alpha}}{\lambda_{2\alpha}}$, 那么上面的转换关系蕴含着 $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, 即比值 λ_α 不依赖于坐标的选取. 此时, 通过选取合适的坐标, Dv_α 局部上可以写成

$$Dv_\alpha = x_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \lambda_\alpha y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

或

$$Dv_\alpha = (x_\alpha + h_\alpha y)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \quad (\lambda_\alpha = 1),$$

这里 h_α 是非零常数.

如果 $\lambda_{1\alpha} = \lambda_{2\alpha} = 0$, 那么 $Dv_\alpha = 0$ 或者 $Dv_\alpha = y_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

定义 2.2.1 *如果 $\mathcal{F}$ 在奇点 p 处的特征值不全为零, 并且其比值 λ 不是正有理数, 那么我们称 p 是既约奇点* (Reduced singularity) *或简单奇点* (Simple singularity). *如果 $\lambda \neq 0$, 则称 p 是非退化的; 否则称其为鞍- 结点* (Saddle-node).

今后为方便起见, 该比值 λ 也称为 $\mathcal{F}$ 在 p 处的特征值 (Eigenvalue).

例 2.2.2 (**既约奇点分类**) 设 p 是既约奇点. 由定义, λ 不是正有理数.

(1) (Poincaré 区域) 假设特征值 $\lambda \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ (我们把满足这类条件的数构成的集合称为庞加莱区域). 由庞加莱线性化定理, 在选取合适的坐标后, $\mathcal{F}$ 对应的切向量场局部可写为

$$x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2-4}$$

等价地, 其 1-形式可写为 $\lambda y dx - x dy$. $\mathcal{F}$ 恰有两条分界线 $x = 0$ 及 $y = 0$. 在例 2.2.1 中, 我们已经讨论了它的奇点解消. 此处不再赘述.

(2) (Siegel 区域) 假设特征值 λ 是负实数 (我们把负实数集合称为西格尔区域). 在适当的坐标选取下, 仍然精确地有两条分界线 $x = 0$ 及 $y = 0$. 一般说来, 这类情形下未必能通过坐标变换将切向量场写成形如 (2-4) 的形式.

(3) (鞍-结点) 此时切向量场可写为 Dulac 形式

$$\Big(x + axy^k + yF(x, y)\Big)\frac{\partial}{\partial x} + y^{k+1}\frac{\partial}{\partial y},$$

这里 $a \in \mathbb{C}$, k 是正整数, F 是在 $p = (0, 0)$ 处的零点阶数为 k 的局部全纯函数. 它的重数为 $k + 1$. 爆发一次后, 例外曲线上有两个奇点 p_0, p_∞ 满足 $m(p_0) = 1$, $m(p_\infty) = k + 1$. 它有一条分界线 $y = 0$, 称为强分界线 (Strong separatrix). 一般说来, 未必存在另一条与之横截相交的分界线. 若有这样的分界线, 则称之为弱分界线 (Weak separatrix).

对既约奇点来说, 所有的分界线的并在局部小邻域内都是正规交曲线, 因而解消中出现的例外曲线都是 $\mathcal{F}$-不变的. 它们在解消后奇点仍然是既约的. ■

注 2.2.1　关于既约奇点表达式如何线性化的讨论可以参看 [Mov15]. ■

例 2.2.3 (**非既约奇点分类**)　设 p 是叶状结构 $\mathcal{F}$ 的非既约奇点. 我们分几类情形讨论.

(1) $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ 但 $\lambda, \frac{1}{\lambda}$ 均不是正整数. 此时由庞加莱线性化定理, 通过选取合适的坐标, 叶状结构的切向量场可以局部写为

$$v = nx\frac{\partial}{\partial x} + my\frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda = \frac{n}{m} > 1, \quad nm \in \mathbb{Z}^+.$$

对奇点 p 爆发一次, 在例外曲线 E 上恰有两奇点 p_0, p_∞ (分别对应 E 上的坐标点 $t = 0, \infty$). p_0 对应切向量场

$$\tilde{v}_0 = nx\frac{\partial}{\partial x} - (n - m)t\frac{\partial}{\partial t},$$

其特征值 $\lambda_0 = \frac{n}{m-n} < 0$, 因而属于西格尔区域. 这表明 p_0 是既约奇点.

p_∞ 对应切向量场

$$\tilde{v}_\infty = (n - m)s\frac{\partial}{\partial s} + my\frac{\partial}{\partial y}, \quad s = \frac{1}{t}. \tag{2-5}$$

其特征值 $\lambda_\infty = \frac{m}{n-m} > 0$.

(2) $\lambda, \frac{1}{\lambda}$ 至少有一个是正整数. 为方便起见, 不妨设 $\lambda = n$ 是正整数. 此时由庞加莱-Dulac 规范型定理, 对应的切向量场局部可表为

$$v = x\frac{\partial}{\partial x} + (ny + \epsilon x^n)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \epsilon = 0, 1.$$

当 $\epsilon=0$ 时, p 爆发一次后的例外曲线上有两个奇点 p_0,p_∞, 分别对应切向量场

$$\tilde{v}_0=(n-1)t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},\quad \tilde{v}_\infty=-ny\frac{\partial}{\partial y}+(n-1)s\frac{\partial}{\partial s}.$$

当 $\epsilon=1$ 时, p_0,p_∞ 分别对应切向量场 (注意, 当 $n=1$ 时, p_0 不再是奇点)

$$\tilde{v}_0=x\frac{\partial}{\partial x}+((n-1)t+x^{n-1})\frac{\partial}{\partial t},\quad \tilde{v}_\infty=-(ny+y^ns^n)\frac{\partial}{\partial y}+((n-1)s+y^{n-1}s^{n+1})\frac{\partial}{\partial s}.$$

在这两种情形中, p_∞ 都是既约奇点.

(3) 线性部分 Dv 非零且对应幂零阵. 不妨设

$$v=(y+A')\frac{\partial}{\partial x}+B\frac{\partial}{\partial y},$$

这里 A' 最低次项次数 $n\geq 2$, B 有 $m\geq 2$ 重奇点. 爆发一次后, 拉回的叶状结构在例外曲线上对应切向量场

$$\tilde{v}=x(t+x^{n-1}\widetilde{A}')\frac{\partial}{\partial x}+(x^{m-1}\widetilde{B}-t(t+x^{n-1}\widetilde{A}'))\frac{\partial}{\partial t},\tag{2-6}$$

这里 $A'=x^{n-1}\widetilde{A}', B=x^{m-1}\widetilde{B}$. 此时例外曲线上仅有一个奇点 p_0 (在 $t=0$ 处), 其阶数为 1 或 2.

(4) 线性部分 Dv 为零. 此时 $l(p)\geq 2$. 利用推论 2.2.1, 经过有限步爆发后, 可以归结到既约奇点或者以上几类非既约奇点. ■

定理 2.2.1 (Seidenberg **解消定理** [Sei68]) *对叶状结构 $\mathcal{F}$ 的任何奇点 p, 存在一系列爆发的复合 $\sigma:\widetilde{X}\to X$, 使得 $\widetilde{\mathcal{F}}:=\sigma^*\mathcal{F}$ 在例外集 $\sigma^{-1}(p)$ 上至多只有既约奇点.*

证明 由推论 2.2.1, 我们只需要讨论 $l(p)=1$ 的奇点. 假如 p 已经是既约奇点, 则结论已成立. 以下均假设 p 不是既约奇点. 我们按照例 2.2.3 的分类来讨论, 并沿用其中的诸记号.

先考察 p 满足例 2.2.3 (1) 的情形. 此时 p_∞ (见式 (2-5)) 任满足例 2.2.3 (1), 而剩余的奇点 p_0 已经是既约的. 我们再对 p_∞ 做爆发. 以此类推, 最终得到唯一的非既约奇点 $p_\infty^{(\ell)}$ (其余的奇点均为既约的), 对应切向量场

$$\widetilde{v}_\ell:=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}.$$

此时 $m(p_\infty^{(\ell)})=a(p_\infty^{(\ell)})=1$, $l(p_\infty^{(\ell)})=2$. 因而由 Van den Essen 重数公式可知, 爆发 $p_\infty^{(\ell)}$ 后, 例外曲线上无奇点. 这表明 p 经过有限步解消后, 所有奇点均变成既约奇点.

其次讨论 p 满足例 2.2.3 (2) 的情形. 此时如果 $\epsilon=0$, 则类似上面的解消, 最终可变为既约奇点. 如果 $\epsilon=1$, 我们最终可以通过解消得到唯一的非既约奇点 (即 $n=1$ 情形), 对应切向量场

$$x\frac{\partial}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

由例 2.2.3 (2) 的讨论, 它在爆发后仅得到既约奇点.

最后考虑 p 满足例 2.2.3 (3) 的情形. 若 p_0 (见式 (2-6)) 的阶数为 1. 此时 p_0 仍满足例 2.2.3 (3) 的情形. 爆发 p_0 后得到唯一的奇点 p_1 (阶数为 2). 再爆发 p_1, 得到三个既约奇点.

今假设 p_0 的阶数为 2, 则爆发 p_0 后得到 2 或 3 个奇点. 结合 $l(p)=1, l(p_0)=2$ 及 Van den Essen 重数公式, 这些奇点的重数之和等于 $m(p_0)-1=m(p)$. 因而每个奇点的重数都严格小于 $m(p)$. 对这类奇点继续爆发, 有限步后最终可以让这类情形不再出现. ■

注 2.2.2 p 是 $\mathcal{F}$ 的多临界点等价于它的奇点解消中包含一条非 $\mathcal{F}$-不变的例外曲线. ■

例 2.2.4 (Riccati 叶状结构的奇点) 在例1.2.4 的记号与假设下, 我们分情形讨论 Riccati 叶状结构的奇点. 回顾式 (1-7):

$$\omega = (a(z)w^2 + b(z)w + zc(z))dz + zd(z)dw,$$

情形 1. (非退化纤维) $d(0) \neq 0$, $b(0) \neq 0$. 此时 $\mathcal{F}$ 在 F 上有两个奇点 p_1, p_2, 对应非零特征值 $(1, \lambda)$ 与 $(1, -\lambda)$, 这里 $\lambda \neq 0$. 不妨设 $p_2 = (0, \infty)$.

若 $\lambda \notin \mathbb{Z}$, 那么每个奇点处都有与 F 横截相交的分界线. 由坐标变换 (将分界线变成坐标轴), 最终可得标准型

$$\omega = \lambda w dz - z dw.$$

此时 $w = 0, \infty$ 对应两条分界线. 此外, 请读者注意, 由于 F 是过这两个奇点的分界线, 故若奇点是满足例 2.2.3 (2) 的庞加莱-Dulac 模型, 则 $\lambda^{-1} \notin \mathbb{Z}$ (若不然, F 将不再是分界线).

若 $\lambda \in \mathbb{Z}$,我们可设 p_2 处的特征值为负整数, 那么由奇点分类结果, 它有横截的分界线. p_1 则未必有横截的分界线. 由坐标变换, 最终可得标准型

$$\omega = (nw + \epsilon z^n)dz - z dw, \quad \epsilon = 0, 1.$$

情形 2. (非退化纤维) $d(0) \neq 0$, $b(0) = 0$. 此时 $\mathcal{F}$ 仅有一个鞍-结点 $p_1 = (0, 0)$, 它有一条强分界线与 F 横截相交, 而 F 是弱分界线. 由坐标变换, 可得标准型

$$\omega = w^2 dz - z dw.$$

如果将奇点移到 $p_2 = \infty$ 处, 也可以将标准型写为

$$\omega = dz - z dw.$$

情形 3. (半退化纤维) $d(0) = 0$, $b(0) \neq 0$. 此时有 $\mathcal{F}$ 在 F 上有两个鞍- 结点. 它们都以 F 为强分界线. 假若每个奇点都有弱分界线, 那么由 [MaRa82] 的结果, 可得标准型

$$\omega = w(1 + \nu z^k)dz - z^{k+1} dw,$$

这里 $\nu \in \mathbb{C}$, k 是正整数. 更一般的情形, 可参看 [MaRa82].

情形 4. (幂零纤维) $d(0) = b(0) = 0$. 此时 $\mathcal{F}$ 在 F 上仅有一个非既约奇点. 当 $c(0) = 0$ 时, $\mathcal{F}$ 对应的切向量场的线性部分为零; $c(0) \neq 0$ 时, 则其线性部分是幂零的.

利用直纹面的双有理变换 (即爆发纤维上一点, 然后收缩原始纤维的严格原像), 我们可以把情形 (1) 中 $\lambda \in \mathbb{Z}$ 的叶状结构 $(nw + z^n)dz - z dw$ 变为情形 (2) 的叶状结构; 将 $nwdz - z dw$ 变为 $dw = 0$ (即 $\mathcal{F}$ 与该纤维横截相交). ■

例 2.2.5 (非常特殊叶状结构的奇点) 在例 1.2.6 和 1.3.4 的记号与假设下. $P \in C$ 是非退化既约奇点, 具有特征值 $\lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$ (见定义 2.2.1).

如果我们采用表达式 (1-8), 那么 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{P}^2$ 上有五个奇点

$$q_0 = [1, 0, 0], \quad q_1 = [0, 1, 0], \quad q_2 = [0, 0, 1], q_3 = [0, 2, 1], \quad q_4 = [1, 1, 1].$$

$\mathcal{F}$-不变的三次曲线 $F = 0$ (见例 1.3.4) 经过 q_0, q_1, q_4, 并且在 q_0 (相应地, q_1) 处与 $\mathcal{F}$-不变直线 $X = 0$ (相应地, $Z = 0$) 相切, 相交数为 3. q_2 (相应地, q_3) 是既约奇点, 其特征值 $\lambda = -\frac{1}{2}$ (相应

地, $\lambda=-\frac{2}{3}$). q_1, q_0 是多临界点 ($l(q_1)=l(q_0)=1$).

q_1 爆发一次后, 在 $\mathcal{F}$-例外曲线 E_1 上有既约奇点 q_5 (特征值 $\lambda=-\frac{2}{3}$) 和多临界点 q_6 ($l(q_6)=1$). 爆发 q_6 后得到 $\mathcal{F}$-例外曲线 E_2, 其中 $q_7=E_1\cap E_2$ 是既约奇点 (特征值 $\lambda=-\frac{1}{2}$), 另有多临界点 q_8 ($l(q_8)=2$). 爆发 q_8 后, 例外曲线上不再有奇点.

q_0 爆发一次后, 在 $\mathcal{F}$-例外曲线 E_3 上有唯一奇点 q_9 ($l(q_9)=2$). 爆发 q_9 得到 $\mathcal{F}$-例外曲线 E_4, 其中有 $q_{10}=E_3\cap E_4$ 是特征值为 $-\frac{1}{2}$ 的既约奇点以及特征值为 $-\frac{2}{3}$ 的既约奇点 q_{11}, 另有多临界点 q_{12} ($l(q_{12}=2)$. 爆发 q_{12} 后, 不再有其他奇点. ■

例 2.2.6 (Lins Neto **叶状结构的奇点**)　我们采用例 1.3.6 的记号与假设.

(1) 先考虑 $\lambda^3\neq 1,\infty$ 的情形. 此时所有的交点 p_{ij}, q_k 均为放射型多临界点 (Diciritical radial type)– 即代数重数为 1 且一次爆发后的例外曲线不是 $\mathcal{F}$-不变的. 具体地说, 它对应的局部切场的线性部分形如 $Dv=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$.

$\mathcal{F}$ 另外还有 9 个奇点:

$$r_{0k}(\lambda)=[\lambda,\omega^k,\omega^{2k}],\quad r_{1k}=[1,\lambda\omega^k,\omega^{2k}],\quad r_{2k}=[1,\omega^k,\lambda\omega^{2k}]\ (k=0,1,2).$$

它们都是 Siegle 区域的奇点, 对应的局部切场的线性部分为 $Dv=3x\frac{\partial}{\partial x}+(2\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial y}$.

(2) 对于 $\lambda\in\{1,\omega,\omega^2,\infty\}$ 的情形. 由例 1.3.6 的讨论, $\mathcal{F}$ 的不变曲线实际上来自于一个三次曲线束, 它包含三条奇异纤维, 每一条都是由过 P_k 中某个点的三条直线构成. 这个曲线束有 9 个基点, 它们恰好是其余 P_j ($j\neq k$) 中的九个交点. ■

2.3 相切指标

现在我们考虑曲线 C, 其每个分支都不是 $\mathcal{F}$-不变的. 此时可以定义 C 在 $p\in U_\alpha$ 处的*相切指标* (Index of tangency)

$$tang(\mathcal{F},C,p)=\dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_{X,p}}{\langle f_\alpha, v_\alpha(f_\alpha)\rangle},$$

这里 $f_\alpha=0$ 是 C 在 U_α 中的局部方程. $tang(\mathcal{F},C,p)$ 主要反映 C 与 $\mathcal{F}$ 在 p 处的相切情况. 特别地, $tang(\mathcal{F},C,p)=0$ 当且仅当 $\mathcal{F}$ 与 C 在 p 处横截相交 (习题 6.5). 因此我们整体上可定义

$$tang(\mathcal{F},C)=\sum_{p\in C}tang(\mathcal{F},C,p).$$

命题 2.3.1　*假设曲线 C 的每个分支都不是 $\mathcal{F}$-不变的. 那么*

$$\begin{aligned}N_{\mathcal{F}}C&=\chi(C)+tang(\mathcal{F},C),\\ K_{\mathcal{F}}C&=-C\cdot C+tang(\mathcal{F},C).\end{aligned}$$

这里

$$\chi(C):=2\chi(\mathcal{O}_C)=2-2p_a(C)=-K_XC-C^2$$

是(算术) 欧拉示性数(Arithmetic Euler characteristic).

证明　由式 (1-3), 我们只需要证明第二个式子即可. 首先, 从 $tang(\mathcal{F},C,p)$ 的定义可知

$$tang(\mathcal{F},C,p)=\mathrm{ord}_p v_\alpha(f_\alpha)|_C.$$

其次, 我们证明

$$v(f)|_C = \{v_\alpha(f_\alpha)|_C\}_{\alpha\in I} \in H^0(C, K_{\mathcal{F}} \otimes C|_C).$$

注意到

$$v_\alpha(f_\alpha) = g_{\alpha\beta} v_\beta(f_{\alpha\beta} f_\beta) = g_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} v_\beta(f_\beta) + g_{\alpha\beta} f_\beta v_\beta(f_{\alpha\beta}),$$

这里 $f_{\alpha\beta}$ 是 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(C))$ 的转换函数 (满足 $f_\alpha = f_{\alpha\beta} f_\beta$). 由于

$$g_{\alpha\beta} f_\beta \cdot v_\beta(f_{\alpha\beta})|_C \equiv 0,$$

所以

$$v_\alpha(f_\alpha)|_C = g_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \cdot v_\beta(f_\beta)|_C.$$

这就表明 $v(f)|_C \in H^0(C, T^\vee_{\mathcal{F}} \otimes C|_C)$.

结合以上讨论, 即得

$$tang(\mathcal{F}, C) = \deg v(f)|_C = (K_{\mathcal{F}} \otimes C) \cdot C.$$

这就完成了证明. ■

注 2.3.1 (欧拉示性数) 读者不要将算术欧拉示性数 $\chi(C)$ 与欧拉拓扑示性数 $\chi_{\text{top}}(C)$ 混淆. 根据 Milnor 公式,

$$\chi_{\text{top}}(C) = \chi(C) + \mu_C,$$

这里 μ_C 是 C 上所有奇点的 Milnor 数总和 (参见 [Mil68][Tan94]).

在其他文献中 (比如[CarM94, CeNe91]), $\chi(C)$ 也被用来表示 C 的正规化的欧拉示性数. 因此读者在阅读文献时要留心. ■

例 2.3.1 在例 1.2.2 中, $\deg \mathcal{F} = tang(\mathcal{F}, L)$, 这里 L 是一般位置上的直线. ■

例 2.3.2 在例 1.2.1 中, 对任何 $\mathcal{F}$-不变曲线 C (即不含纤维中的分支),

$$K_{\mathcal{F}} C + C^2 = r(C) - D(f)C,$$

这里 $r(C) := K_f C + C^2$ 是相对分歧指数. ■

2.4 Gomez-Mont-Seade-Verjovsky 指标

接下来, 我们再考虑每个不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的曲线 C. 对每个点 $p \in C \cap U_\alpha$, 回顾式 (1-9). 我们可以定义 Gomez-Mont-Seade-Verjovsky 指标

$$Z(\mathcal{F}, C, p) := \text{ord}_p \frac{h_\alpha}{g_\alpha}\Big|_C = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial S} \frac{g_\alpha}{h_\alpha} d\left(\frac{h_\alpha}{g_\alpha}\right).$$

特别地, 若 $p \in C$ 是光滑点, h_α 可取为局部全纯函数 (此时可假设 C 的局部方程为 $x = 0$, 并直接计算出这一分解). 因此 $Z(\mathcal{F}, C, p)$ 就是 $v_\alpha|_C$ 在 p 处的阶数. $Z(\mathcal{F}, C, p) = 0$ 等价于 p 不是 $\mathcal{F}$ 的奇点.

在整体上, 也可以定义

$$Z(\mathcal{F}, C) := \sum_{p\in C} Z(\mathcal{F}, C, p).$$

特别地, 如果 C 光滑且 $Z(\mathcal{F},C)>0$, 那么 $Sing(\mathcal{F})\cap C\neq\emptyset$.

注 2.4.1　在有些文献中 (比如 [Bru97]), $Z(\mathcal{F},C,p)$ 也被记作 $GSV(\mathcal{F},C,p)$. ■

例 2.4.1　(1) $\omega=2ydx-3xdy$ 在 $p=(0,0)$ 附近有不变曲线 $C:x^2-y^3=0$. 取 $\frac{h}{g}|_C=\frac{y}{x}|_C$. 因此 $Z(\mathcal{F},C,p)=-1$.

(2) 设 n,m 是正整数. $\omega=nydx+mxdy$ 在 $p=(0,0)$ 处有不变曲线 $C_1:x=0$ 及 $C_2:y=0$. 易知 $Z(\mathcal{F},C_1,p)=Z(\mathcal{F},C_2,p)=1$. 取 $C=C_1+C_2$, 那么 $Z(\mathcal{F},C,p)=0$. ■

类似命题 2.3.1, 我们有如下结论.

命题 2.4.1　*设曲线 C 的每个不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么*

$$N_{\mathcal{F}}\cdot C = C\cdot C+Z(\mathcal{F},C),$$
$$K_{\mathcal{F}}\cdot C = -\chi(C)+Z(\mathcal{F},C).$$

证明　设 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ 是 $N_{\mathcal{F}}$ 的转移函数 (满足 $e_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}^{-1}e_\beta$). 于是

$$\frac{\omega_\alpha}{f_\alpha}=\varphi_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta}^{-1}\frac{\omega_\beta}{f_\beta}.$$

再利用

$$\frac{\omega_\alpha}{f_\alpha}=\frac{h_\alpha}{g_\alpha}\frac{df_\alpha}{f_\alpha}+\frac{\eta_\alpha}{g_\alpha}.$$

我们得到 $N_{\mathcal{F}}(-C)|_C$ 整体半纯截面 $\{h_\alpha|_C\}_{\alpha\in I}$. 因此

$$Z(\mathcal{F},C)=\deg N_{\mathcal{F}}(-C)|_C=N_{\mathcal{F}}\cdot C-C\cdot C.$$

另一等式直接来自于它. ■

例 2.4.2　在例 1.2.2 中, 无穷远直线 L_∞ 是 $\mathcal{F}$-不变的充要条件为 $R\equiv 0$.

当 $\deg\mathcal{F}=1$ 时, 我们可以找到一条通过 $\mathcal{F}$ 某奇点的直线, 使得该直线是 $\mathcal{F}$ 不变的 (习题 6.11). 通过合适的坐标选取, 不妨设该直线是无穷远直线 L_∞, 因而由上讨论可知, $\mathcal{F}$ 可表为

$$P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y},$$

这里 P,Q 是线性函数. 注意到此时 $K_{\mathcal{F}}=\mathcal{O}_X$, 因此任何 $\mathcal{F}$-不变曲线 C 都满足关系式 $Z(\mathcal{F},C)=\chi(C)$. ■

例 2.4.3 (Riccati **叶状结构的等价描述**)　设 $\varphi:X\to C$ 是一个直纹面, $\mathcal{F}$ 是 X 上满足 $K_{\mathcal{F}}F=0$ 的叶状结构, 我们来证明 $\mathcal{F}$ 关于 φ 是 Riccati 的. 此时若一般纤维 F 不是 $\mathcal{F}$- 不变的, 那么 $tang(\mathcal{F},F)=0$ (命题 2.3.1), 因而 $\mathcal{G}$ 与 F 横截相交. 若 F 是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么 $Z(\mathcal{F},F)=2$ (命题 2.4.1). 这意味着 F 上有 $\mathcal{F}$ 的奇点. 由于 $Sing(\mathcal{F})$ 是有限集, 所以对一般纤维 F 来说, 后一情形不会出现. 结合例 1.2.4 的讨论, $\mathcal{F}$ 关于 φ 是 Riccati 的等价描述为 $T_{\mathcal{F}}F=0$.

为方便讨论, 我们不妨设 $\varphi:X\to C$ 是相对极小的 (收缩映射诱导了相应的叶状结构). 现在我们考察一条光滑纤维 F, 使得它不是 $\mathcal{F}$-横截的 (即与 $\mathcal{F}$ 不横截相交). 由上面的讨论, 这样的 F 是 $\mathcal{F}$-不变的且 $Z(\mathcal{F},F)=2$. 由此可知, $\mathcal{F}$ 在 F 上有一个或两个奇点, 因此 $\mathcal{F}$ 局部可表为式 (1-7). ■

我们还可以从另一个角度去理解 Gomez-Mont-Seade-Verjovsky 指标. 为此需要引进一个新的指标量. 设 $p \in X$, U 是 p 的小邻域, B 是 U 内过 p 的分界线.$\mathcal{F}$ 在 U 上的局部切场为

$$v = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}.$$

考虑 B 在 p 附近的极小参数化

$$\varphi : \Delta \to B, \quad t \to \varphi(t) = (x(t), y(t)),$$

这里 ($\Delta = \{t \in \mathbb{C} || t| < 1\}$, $p = \varphi(0)$). 我们定义 $\mathcal{F}$ 在分界线 B 上的重数

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \mathrm{ord}_0 \varphi^* v.$$

由定义可得 (请读者自己验证)

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \begin{cases} \mathrm{ord}_0 A(x(t), y(t)) - \mathrm{ord}_0 x(t) + 1, \text{ 如果 } x(t) \neq 0, \\ \mathrm{ord}_0 B(x(t), y(t)) - \mathrm{ord}_0 y(t) + 1, \text{ 如果 } y(t) \neq 0. \end{cases} \tag{2-7}$$

$\mu_p(\mathcal{F}, B) = 0$ 当且仅当 $p \notin Sing(\mathcal{F})$ (习题 6.15).

命题 2.4.2 $Z(\mathcal{F}, B, p) = \mu_p(\mathcal{F}, B, p) - \mu_p(B)$, 这里 $\mu_p(B)$ 指 B 在 p 处的 Milnor 数.

证明 设$\sigma : (\widetilde{X}, E, \widetilde{\mathcal{F}}) \to (X, p, \mathcal{F})$ 是关于 p 的爆发, E 是例外曲线, $\widetilde{B}$ 是 B 的严格原像, $m = (\widetilde{B}, E)$. 我们有

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) = \mu_{\tilde{p}}(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}) + m(l(p) - 1), \quad \tilde{p} = \widetilde{B} \cap E. \tag{2-8}$$

这里 $l(p)$ 的定义见例 1.2.3 (读者自己验证). 另一方面, 我们有

$$Z(\mathcal{F}, B, p) = Z(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}, \tilde{p}) - m^2 + ml(p) \quad \text{(习题 6.11)}$$
$$\mu_p(B) = \mu_{\tilde{p}}(\widetilde{B}) + m(m-1) \qquad \text{([Tan94, Lemma 1.3]).}$$

因而,

$$\mu_p(\mathcal{F}, B) - \mu_p(B) - Z(\mathcal{F}, B, p) = \mu_{\tilde{p}}(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}) - \mu_{\tilde{p}}(\widetilde{B}) - Z(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{B}, \tilde{p}).$$

这样, 由 Seidenberg 解消定理, 即可归结为验证 p 是既约奇点的情形(留给读者完成). ■

对经过 p 的不变曲线 C (允许是局部或可约的), 我们也可以定义

$$\mu_p(\mathcal{F}, C) := Z(\mathcal{F}, C, p) + \mu_p(C).$$

推论 2.4.1 ([CeNe91]) 令 $C(p)$ 是 C 中所有经过 p 的不可约解析分支构成的集合, $k_p(C) = \sharp C(p)$. 那么

(1) $\mu_p(\mathcal{F}, C) = \sum_{B \in C(p)} \mu_p(\mathcal{F}, B) - (k_p - 1)$.

(2) $\chi(\widetilde{C}) + K_{\mathcal{F}} C = \sum_{p \in C} \sum_{B \in C(p)} \mu_p(\mathcal{F}, B)$.

证明 (1) 来自于习题 6.12 (3) 和 [Tan94, Lemma 1.2].

(2) 来自于命题 2.4.1, 注记 2.3.1 以及

$$\chi_{\mathrm{top}}(C) = \chi_{\mathrm{top}}(\widetilde{C}) - \sum_{p \in C} (k_p(C) - 1),$$

这里 $\widetilde{C}$ 是 C 的正规化. ■

2.5 变分指标

设 $\omega = B(x,y)dx - A(x,y)dy$ 是叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 $p \in X$ 附近的微分场. 我们在 p 的小邻域 U 内定义光滑的 $(1,0)$-形式

$$\beta = F \cdot \left(\frac{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}}{|A|^2 + |B|^2} \right) \cdot \left(\overline{A}dx + \overline{B}dy \right) \tag{2-9}$$

这里 F 是局部光滑函数, 使得在 p 的某个邻域 $V \subset U$ 内恒取零, 在某个邻域 $V' \subset U$ 之外恒取 1 ($V \subset V'$). 直接验证可知, 在 $U \setminus V'$ 上有

$$d\omega = \beta \wedge \omega. \tag{2-10}$$

对 $\mathcal{F}$-不变曲线 C, 我们引入**变分指标** (Variation)

$$Var(\mathcal{F}, C, p) = Res_0 \{\beta\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma \beta,$$

这里 γ 是 C 中围绕 p 的小环路. 由简单计算可知, 对于 $\mathcal{F}$ 的光滑点 p, $Var(\mathcal{F}, C, p) = 0$.

注 2.5.1 变分指标中的 β 也可以替换成其他满足 (2-10) 的光滑 $(1,0)$- 形式. 由于 C 是 $\mathcal{F}$-不变的, 因此这一替换不影响它的值. ■

为了研究变分指标的整体性质, 我们还需要一些准备工作. 首先选取合适的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$. 在每个 U_i 上, 叶状 $\mathcal{F}$ 对应的微分 ω_i 都配备了光滑的 $(1,0)$-形式 β_i 以及开邻域 $V_i \subset U_i$, 使得 $V_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, 并且在 $U_i \setminus V_i$ 上满足

$$d\omega_i = \beta_i \wedge \omega_i. \tag{2-11}$$

这样, 在 $U_i \cap U_j$ 上, 式 (2-11) 处处成立. 设 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ 是 $N_{\mathcal{F}}$ 的转移函数. 那么在 $U_i \cap U_j$ 上,

$$\begin{aligned} \beta_i \wedge \omega_i = d\omega_i &= d(\varphi_{ij}\omega_j) = d\varphi_{ij} \wedge \omega_j + \varphi_{ij} d\omega_j \\ &= d\varphi_{ij} \wedge \omega_j + \varphi_{ij}\beta_j \wedge \omega_j = d\varphi_{ij} \wedge \omega_j + \beta_j \wedge \omega_i \\ &= \left(\frac{d\varphi_{ij}}{\varphi_{ij}} + \beta_j \right) \wedge \omega_i. \end{aligned}$$

亦即

$$\left(\frac{d\varphi_{ij}}{\varphi_{ij}} + \beta_j - \beta_i \right) \wedge \omega_i = 0. \tag{2-12}$$

由注记 1.1.1, ω_i 可以看成 $N_{\mathcal{F}}^\vee$ 的基. 因此式 (2-12) 是 $N_{\mathcal{F}}^\vee$ 的光滑截面的 1-余链. 由于 $N_{\mathcal{F}}^\vee$ 作为光滑截面层是精细层, 故一阶上同调为零. 因此存在 U_i 上的光滑 $(1,0)$-形式 γ_i, 使得 $\gamma_i \wedge \omega_i = 0$ 且在 $U_i \cap U_j$ 上有

$$\frac{d\varphi_{ij}}{\varphi_{ij}} + \beta_j - \beta_i = \gamma_i - \gamma_j.$$

令 $\tilde{\beta}_i = \beta_i + \gamma_i$. 由上面的关系式, 在 U_i 上, 我们仍有

$$d\omega_i = \tilde{\beta}_i \wedge \omega_i.$$

现在我们可以定义整体 2-形式

$$\Omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d\tilde{\beta}_i$$

Ω 可以分拆为 $(2,0)$-形式与 $(1,1)$- 形式, 后者即为 Dolbeault 意义上的陈类, 亦即 $c_1(N_{\mathcal{F}})$. 容易验证, 在 $U_i \setminus V_i$ 上有

$$\Omega \wedge \omega_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d\tilde{\beta}_i \wedge \omega_i = 0. \tag{2-13}$$

以及

$$\Omega \wedge \Omega = 0. \tag{2-14}$$

命题 2.5.1 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 那么

$$N_{\mathcal{F}} C = \sum_{p \in C} Var(\mathcal{F}, C, p).$$

证明 由式 (2-13), 在 $C \cap (U_i \setminus V_i)$ 上恒有 $\Omega \wedge \omega_i = 0$. 因此对于 $\mathcal{F}$-不变曲线 C, Ω 限制在的 $C \cap (U_i \setminus V_i)$ 上恒为零. 因此 $\int_C \Omega$ 实际上由每个奇点在局部邻域上的贡献所得. 利用 Stockes 公式, 即得

$$N_{\mathcal{F}} C = \int_C \Omega = \sum_{p \in C \cap Sing(\mathcal{F})} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma(p)} \tilde{\beta} = \sum_{p \in C \cap Sing(\mathcal{F})} Var(\mathcal{F}, C, p).$$

这就完成了证明. ■

2.6 Camacho-Sad 指标

设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, $p \in C \cap Sing(\mathcal{F})$. 回顾式 (1-9), 我们可以局部上改写成

$$-\frac{\eta}{h} = \frac{df}{f} - \frac{g\omega}{fh},$$

这里 $f = 0$ 是 C 在 p 附近的局部方程, g, h 是全纯函数, η 是全纯 1-形式. 我们定义Camacho-Sad 指标

$$CS(\mathcal{F}, C, p) = Res_p \left\{ -\frac{\eta}{h}\Big|_C \right\} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma \frac{\eta}{h},$$

这里 γ 是 C 上围绕 p 的小环路.

例 2.6.1 设 p 是既约奇点.

(1) 若 p 是非退化的, 局部上 $\omega = \lambda y(1 + o(1))dx - x(1 + o(1))dy$, 则由直接计算可知

$$CS(\mathcal{F}, x = 0, p) = \frac{1}{\lambda},$$
$$CS(\mathcal{F}, y = 0, p) = \lambda.$$

(2) 若 p 是鞍-结点, 考虑 Dulac 标准型

$$y^{k+1}dx - \Big(x + axy^k + yF(x, y)\Big)dy.$$

$y = 0$ 是强分界线.

$$CS(\mathcal{F}, y = 0, p) = 0.$$

假设 p 也有弱分界线, 我们适当选取坐标后, 可考虑标准型

$$y^{k+1}dx - x\left(1 + ay^k + yF(x,y)\right)dy.$$

于是 $CS(\mathcal{F}, x=0, p) = a$. ■

命题 2.6.1 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, $p \in C \cap Sing(\mathcal{F})$. 我们有

$$Var(\mathcal{F}, C, p) = Z(\mathcal{F}, C, p) + CS(\mathcal{F}, C, p).$$

证明 由 $Z(\mathcal{F}, C, p)$ 的定义, 我们可写为积分形式

$$Z(\mathcal{F}, C, p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma \frac{g}{h} d\left(\frac{h}{g}\right).$$

在小环路 γ 的小邻域内, 我们可以要求 $\frac{h}{g}$ 是非零全纯的. 此时我们已有

$$\begin{aligned} g\omega =& hdf + f\eta, \\ d\omega =& \beta \wedge \omega. \end{aligned}$$

令 $\beta' = \frac{g}{h} d\left(\frac{h}{g}\right) - \frac{\eta}{h}$. 利用上面的等式可得

$$d\omega = \beta' \wedge \omega + f\eta',$$

这里 η' 是某个 1-形式 (在 γ 的小邻域内全纯). 由于 C 是 $\mathcal{F}$- 不变的, 故得 $\beta'|_\gamma = \beta|_\gamma$. 因此

$$Var(\mathcal{F}, C, p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma \beta' = Z(\mathcal{F}, C, p) + CS(\mathcal{F}, C, p).$$

至此完成证明. ■

定理 2.6.1 (Camacho-Sad **公式** [CaSa82, Suw98]) 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 那么

$$C^2 = \sum_{p \in C \cap Sing(\mathcal{F})} CS(\mathcal{F}, C, p).$$

证明 结合命题 2.5.1 及命题 2.4.1 即得公式. ■

推论 2.6.1 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 若 $\mathcal{F}$ 在 C 上没有奇点, 则 $N_{\mathcal{F}}C = C^2 = 0$.

2.7 Baum-Bott 指标

考虑点 $p \in Sing(\mathcal{F})$ 处的叶状结构 $\omega = B(x,y)dx - A(x,y)dy$. 设

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} \end{pmatrix}$$

是 A, B 关于 x, y 的雅可比矩阵. [BaBo70] 定义了两类指标

$$\begin{aligned} PH(\mathcal{F}, p) &= Res_{(0,0)} \left\{ \frac{\det J}{AB} dx \wedge dy \right\}, \\ BB(\mathcal{F}, p) &= Res_{(0,0)} \left\{ \frac{(\mathrm{Tr} J)^2}{AB} dx \wedge dy \right\} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{S^3} \beta \wedge d\beta, \end{aligned}$$

根据 [GrHa94, Ch.5, Sec.2, Page 665] 的讨论, $PH(\mathcal{F}, p) = m(\mathcal{F}, p)$, 即 $\mathcal{F}$ 在 p 处的重数. 我们更关心 $BB(\mathcal{F}, p)$, 它被称为 Baum-Bott 指标.

注 2.7.1 $BB(\mathcal{F},p)$ 与 $Var(\mathcal{F},C,p)$ 实际上并不依赖 β 的选取, 只要这样的 β 满足式 (2-11) 即可. ■

由残数计算可知

$$BB(\mathcal{F},p)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{S^3}\beta\wedge d\beta$$

这里 S^3 是围绕 p 的三维球面. 特别地, 若 p 是非退化奇点, 具有特征值 λ, 那么

$$BB(\mathcal{F},p)=\lambda+\frac{1}{\lambda}+2.$$

定理 2.7.1 (Baum-Bott **公式** [BaBo70]) *在上述定义与记号下, 我们有*

$$N_{\mathcal{F}}^2=\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})}BB(\mathcal{F},p).$$

证明 由相交型定义,

$$N_{\mathcal{F}}^2=\int_X\Omega\wedge\Omega.$$

利用式 (2-14), 这个积分实际上可以归结为每个奇点 p 附近的小邻域 V' 上的积分贡献 $\int_{V'_p}\Omega\wedge\Omega$. 由 Stockes 公式, 即得

$$N_{\mathcal{F}}^2=\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})}\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{\partial V'_p}\tilde{\beta}\wedge d\tilde{\beta}=\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})}BB(\mathcal{F},p).$$

这就完成了证明. ■

这个结论也可以推广到带边界的情形 (参见 [BaBo70, Bru97]). 具体言之, 设 $Y\subseteq X$ 是相对紧的区域 (也不要求 X 紧), 带有光滑边界 ∂Y, 并且该边界不与 $Sing(\mathcal{F})$ 相交. 假设 $N_{\mathcal{F}}$ 在 ∂Y 的一个邻域内是平凡的. 因此我们仍然可以构造 ∂Y 附近的光滑 $(1,0)$-形式 β, 满足式 (2-10). 因而可以定义

$$BB(\mathcal{F},\partial Y):=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_{\partial Y}\beta\wedge d\beta$$

以及 $c_1^2(N_{\mathcal{F}|_Y})$. 利用 Stockes 公式以及与 Baum-Bott 公式类似的证明, 即得

命题 2.7.1 (**带边界的** Baum-Bott **公式**) $BB(\mathcal{F},\partial Y)=\sum_{p\in Sing(\mathcal{F})\cap Y}BB(\mathcal{F},p)-c_1^2(N_{\mathcal{F}|_Y})$.

定义 2.7.1 *设 p 是叶状结构 $\mathcal{F}$ 的奇点, ω 是 $\mathcal{F}$ 在 p 的小邻域内对应的微分场. 如果局部上存在闭的半纯 1-形式 γ_0 以及全纯 1-形式 γ_1, 使得*

$$d\omega=(\gamma_0+\gamma_1)\wedge\omega, \tag{2-15}$$

我们就说 p 是拟刘维尔型的 (Almost Liouvillean). 如果 $\gamma_1=0$, 就称之为刘维尔型 (Liouvillean). 如果 γ_0 中的极点都是一阶的, 我们就称该奇点是简单的 (Simple).

例 2.7.1 考虑例 1.2.8 中的叶状结构 $\mathcal{F}_\lambda$. 在仿射开集 (x,y) 上, 令

$$\beta=\frac{H+1}{3H(H-1)}dH,\quad H=\frac{y^3-1}{x^3-1}.$$

则 $d\omega_\lambda=\beta\wedge\omega_\lambda$, $d\beta=0$. 因此 $\mathcal{F}$ 是刘维尔型的. ■

引理 2.7.1 设 $p \in Sing(\mathcal{F})$ 是拟维尔型的, 则式 (2-15) 中的 γ 的极点的除子部分 $(\gamma)_\infty$ 是 $\mathcal{F}$-不变的.

证明 设 $q \in (\gamma)_\infty - \{p\}$. 在 q 附近可设 $\omega = adx$, a 是局部处处非零的全纯函数; $\gamma_0 = bdx + cdy$, b, c 是局部半纯的. 由式 (2-15) 以及 a 局部处处非零, 可推出 c 是全纯的. 再由 $d\gamma_0 = 0$ 知, $\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial c}{\partial x}$ 是全纯的. 因此 b 的极点部分含于 $z = 0$ 中, 即 $(\gamma)_\infty$ 是 $\mathcal{F}$-不变的. ■

设 $(\gamma)_\infty$ 的局部不可约解析分支 $C_1, \ldots, C_r$. 根据上面的引理, C_i 是过 p 的分界线. 我们用 $Res(\gamma_0, C_i)$ 表示 γ_0 围绕 C_i 的残数.

命题 2.7.2 ([Bru97]) 设 $p \in Sing(\mathcal{F})$ 是简单的拟刘维尔型奇点, 那么

$$BB(\mathcal{F}, p) = \sum_{i=1}^{r} Res(\gamma_0, C_i) \cdot Var(\mathcal{F}, C_i, p).$$

证明 设 $C = \cup_i C_i$, V 是 ∂C 的管状邻域, γ' 是 V 上全纯 1-形式, 满足 $d\omega = \gamma' \wedge \omega$. 取 V 上具有紧支集的光滑解析函数 $\phi \in C_c^\infty(V)$, 使得 ϕ 在更小的邻域内恒取 1. 设 $\beta = \phi\gamma' + (1-\phi)\gamma$, 于是 $d\omega = \beta \wedge \omega$. 注意到 γ, γ' 是全纯的, 因而

$$\beta \wedge d\beta = d\phi \wedge \gamma' \wedge \gamma = d\left((1-\phi)\gamma \wedge \gamma'\right).$$

这样,

$$\int_{S^3} \beta \wedge d\beta = \int_{S^3 \cap V} \beta \wedge d\beta = \int_{\partial(S^3 \cap V)} (1-\phi)\gamma \wedge \gamma' = \int_{\partial(S^3 \cap V)} \gamma \wedge \gamma' = \int_{\partial(S^3 \cap V)} \gamma_0 \wedge \gamma'$$

设 $V = \cup_i V_i$, V_i 是 ∂C_i 的邻域. 现在问题归结为证明

$$\int_{\partial(S^3 \cap V_i)} \gamma_0 \wedge \gamma' = (2\pi\sqrt{-1})^2 Res(\gamma_0, C_i) Var(\mathcal{F}, C_i, p). \tag{2-16}$$

取合适的坐标 (z, w), 使得 C_i 由 $w = 0$ 定义, $\partial C_i = \{(z, w) | w = 0, |z| = 1\}$, $S^3 \cap V_i = \{(z, w) | |w| < \varepsilon, |z| = 1\}$ (这里 S^3 不一定需要是球). 此时可写 $\gamma_0 = \lambda_i \frac{dw}{w} + g_i$, 其中 g_i 全纯, $\lambda_i = Res(\gamma_0, C_i)$. 再设 $\gamma = adz + bdw$. 这样, 我们有

$$\int_{\partial(S^3 \cap V_i)} \gamma_0 \wedge \gamma' = \int_{|w|=\varepsilon, |z|=1} \gamma_0 \wedge \gamma' = 2\pi\sqrt{-1}\lambda_i \int_{|z|=1} a(z, 0)dz = 2\pi\sqrt{-1}\lambda_i \int_{\partial C_i} \gamma'.$$

由此可得式 (2-16). ■

例 2.7.2 考虑鞍-结点

$$\omega = z^{p+1}dw - w(1 + \nu z^p)dz.$$

设 $\gamma = (p+1)\frac{dz}{z} + \frac{dw}{w}$. 我们有 $d\omega = \gamma \wedge \omega$.因而由命题 2.7.2 可得 $BB(\mathcal{F}, p) = 2p + 2 + \nu$. ■

2.8 分界线定理

我们将在这一节讨论经过叶状结构奇点的分界线的存在性. 处理此问题的关键工具是 Camacho-Sad 公式.

定理 2.8.1 (分界线定理 [Cam88]) 设 C 是连通的 $\mathcal{F}$-不变曲线, 且满足以下诸条件:

(1) $C \cap Sing(\mathcal{F})$ 中的点都是既约的 (因此 C 是正规交),

(2) C 是负定曲线且对偶图构成树.

那么存在奇点 $p \in C \cap Sing(\mathcal{F})$ 以及过 p 的分界线 C', 使得 C' 不含于 C 中.

证明 反证法, 假设命题不成立. 先考察 $p \in C \cap Sing(\mathcal{F})$. 如果 p 不是 C 的结点, 那么它只能是鞍-结点, 否则将有两条分界线经过, 由假设条件, 它们都是 C 中的分支, 矛盾! 同样地, 由假设条件, 此时过 p 的分支就是强分界线, 并且它没有弱分界线. 这样, $CS(\mathcal{F}, C, p) = 0$.

设 $C = \sum_{i=1}^{r} C_i$. 对任何分支 C_i, 由上面讨论以及 Camacho-Sad 公式, 我们有

$$C_i^2 = \sum_{p \in C_i \cap (C - C_i)} CS(\mathcal{F}, C_i, p) = \sum_{p \in C_i \cap (C - C_i)} Re\left(CS(\mathcal{F}, C_i, p)\right).$$

最后一个等式来自于 C_i^2 是实数的事实.

由 C 的负定性, 对任何非零 $\mathbb{R}$-除子 $D = n_1 C_1 + \cdots + n_r C_r$, 我们总有 $D^2 < 0$. 另一方面, 结合上述 Camacho-Sad 公式, 可得

$$D^2 = \sum_{1 \le i < j \le r} \left(n_i^2 Re(CS(\mathcal{F}, C_i, C_i \cap C_j)) + n_j^2 Re(CS(\mathcal{F}, C_j, C_i \cap C_j)) + 2n_i n_j\right) C_i C_j.$$

注意 C 是树, 所以上式中的 $C_i \cap C_j$ 要么是空的, 要么是一个结点. 由于每个结点 $C_i \cap C_j$ 要么是 $\mathcal{F}$ 的非退化点, 要么是鞍-结点. 因此由例 2.6.1 的计算,

$$n_i^2 Re(CS(\mathcal{F}, C_i, C_i \cap C_j)) + n_j^2 Re(CS(\mathcal{F}, C_j, C_i \cap C_j)) + 2n_i n_j$$

不是负定的二元型. 现在我们利用下面的引理 2.8.1, 即可找到不全为零的实数 $n_1, \cdots, n_r$, 使得 $D^2 = 0$. 这就得到矛盾! 由此即得命题结论. ■

引理 2.8.1 设 $C = \sum_{i=1}^{r} C_i$ 是树, a_{ij} 是满足 $a_{ij} a_{ji} \le 1$ 的实数 $(i, j = 1, \cdots, r)$. 那么存在不全为零实数 $n_1, \cdots, n_r$ 使得

$$\sum_{1 \le i < j \le r} \left(a_{ij} n_i^2 + a_{ji} n_j^2 + 2n_i n_j\right) C_i C_j = 0.$$

证明 为书写方便, 我们记

$$c_{ij} = a_{ij} n_i^2 + a_{ji} n_j^2 + 2n_i n_j.$$

今对 r 施归纳法. $r = 1, 2$ 时是显然的. 假设 $< r$ 的情形已证. 不妨设 C_r 是树的端点, 连接唯一的分支 C_{r-1}. 由归纳假设, 对树 $C - C_r$, 可找到不全为零的实数 $n_1, \cdots, n_{r-1}$, 使得

$$\sum_{1 \le i < j \le r-1} c_{ij} C_i C_j = 0.$$

由于 $a_r b_r \ge 1$, 所以存在实数 n_r 满足

$$c_{r-1,r} = a_{r,r-1} n_r^2 + a_{r-1,r} n_{r-1}^2 + 2n_r n_{r-1} = 0.$$

现在我们有

$$\sum_{1 \le i < j \le r} c_{ij} C_i C_j = \sum_{1 \le i < j \le r-1} c_{ij} C_i C_j + c_{r-1,r} C_{r-1} C_r = 0.$$

综上可知, 对任何 r, 结论均成立. ■

推论 2.8.1 ([CaSa82]) 对任何 $\mathcal{F}$ 的奇点 p, 都存在至少一条经过它的分界线.

证明 考虑 $\mathcal{F}$ 在 p 处的奇点解消 $\sigma : \widetilde{X} \to X$, 使得诱导的叶状结构 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 在例外曲线 C 上只有既约奇点. 如果 C 中有一条分支不是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 不变的, 那么 p 实际上是多临界点 (即有无数条分界线, 它们来自与该分支横截相交的叶状结构). 如果 C 的任何分支都是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么由分界线定理即得经过 $C \cap Sing(\widetilde{\mathcal{F}})$ 中某点的分界线 (不含于例外曲线中), 其像即为过 p 的分界线. ■

满足分界线定理条件的一类重要曲线是所谓的 $\mathcal{F}$-链.

定义 2.8.1 如果曲线 C 满足如下条件, 就称为 $\mathcal{F}$-链 ($\mathcal{F}$-chain):

(1) $C = \cup_{i=1}^{r} C_i$ 是 Hirzebruch-Jung 链, 即每个 C_i 都是光滑有理曲线且 $C_i^2 \leq -2$, 满足

$$C_i C_j = \begin{cases} 1, \text{ 若 } |i-j| = 1, \\ 0, \text{ 若 } |i-j| > 1. \end{cases}$$

(2) 每个 C_i 都是 $\mathcal{F}$-不变的.

(3) $C \cap Sing(\mathcal{F})$ 都是非退化的既约奇点.

(4) $Z(\mathcal{F}, C_1) = 1$, $Z(\mathcal{F}, C_i) = 2$ $(i = 2, \cdots, r)$. C_1 也被简称为该链的第一分支 (曲线).

进一步, 如果一个 $\mathcal{F}$-链不能严格含于其他 $\mathcal{F}$-链中, 则称其为极大 $\mathcal{F}$-链.

由分界线定理, 极大 $\mathcal{F}$-链上有一奇点, 它有一条分界线不在链中. 因此该奇点只能在最后一条分支上. 特别地, 如果有一条 $\mathcal{F}$-不变曲线与该链相交, 那么它只能通过这个奇点.

推论 2.8.2 极大 $\mathcal{F}$-链彼此互不相交.

证明 反证法. 假设两个极大 $\mathcal{F}$-链相交. 由上面的讨论, 它们的并 $C = \cup_{i=1}^{r} C_i$ 仍满足上述定义中的 (1)(2)(3), 且有

$$Z(\mathcal{F}, C_1) = Z(\mathcal{F}, C_r) = 1, \quad Z(\mathcal{F}, C_i) = 2 \ (i = 2, \cdots, r-1).$$

但这与分界线定理矛盾! 故得结论. ■

2.9 非多临界点

设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $p \in Sing(\mathcal{F})$ 是非多临界点, C 是过 p 的 $\mathcal{F}$-不变曲线. 考虑 p 的小邻域 U 以及一个局部全纯映射 $f : U \to \mathbb{C}$, 使得 $C = f^{-1}(0)$. 设 $C_1, \ldots, C_r$ 是 C 在 p 处局部不可约分支, 分别由 $f_i = 0$ 定义, $f = f_1^{n_1} \ldots f_r^{n_r}$. 我们考虑在 U 上由

$$df = f\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \frac{df_i}{f_i}\right)$$

生成的叶状 $\mathcal{G}_f$. 这两类叶状存在密切联系. 下面我们要比较这两个叶状的奇点指标.

命题 2.9.1 在上述记号与假设下, 设 C' 是 C 中若干不可约分支的并. 那么我们有

(1) (Camacho-Neto-Sad 阶数不等式 [CSN84]) $\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) \geq \mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f)$, 即 $\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) + 1 \geq \mathrm{mult}_p(C_{\mathrm{red}})$.

(2) (Carnicer 不等式 [CarM94]) $Z(\mathcal{F}, C', p) \geq Z(\mathcal{G}_f, C', p)$, 即 $\mu_p(\mathcal{F}, C') \geq \mu_p(\mathcal{G}_f, C')$.

证明 我们采用 [Bru97] 的证明. 首先考虑一系列爆发 $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n : X_n \to X$, 使得 $\sigma^* C$ 是正规交:

$$(X, E_n) \xrightarrow{\sigma_n} (X_{n-1}, E_{n-1}) \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\sigma_2} (X_1, E_1) \xrightarrow{\sigma_1} X_0 = X,$$

这里 E_i 是 σ_i 的例外曲线, $p_{i-1} = \sigma_i(E_i)$ (这里令 $p_0 = p$).

我们对爆发次数 n 施归纳法. 当 $n = 0$ 时, $\mathrm{ord}_p(G_f) = 1$. $Z(G_f, \Gamma, p) = 1$ (Γ 是 C 中过 p 的任一不可约分支). 结合习题 6.12 可得结论. 今假设对爆发次数 $< n$ 的情形均已证. 设 $\mathcal{F}_1 = \sigma_1^* \mathcal{F}$ (相应地, $\mathcal{G}_1 = \sigma_1^* \mathcal{G}_f$)) 是爆发诱导的叶状. $\mathcal{G}_1$ 显然是由 $d\sigma_1^* f$ 诱导. E_1 既是 $\mathcal{F}_1$-不变, 也是 $\mathcal{G}_1$-不变的. 由例 1.2.3 的讨论, 在这种情形下,

$$N_{\mathcal{F}_1} E_1 = \mathrm{ord}_p(\mathcal{F}), \quad N_{\mathcal{G}_1} E_1 = \mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f).$$

结合 Camacho-Sad 公式即得

$$\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) = -1 + \sum_{q \in E_1 \cap Sing(\mathcal{F}_1)} Z(\mathcal{F}_1, E_1, q),$$
$$\mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f) = -1 + \sum_{q \in E_1 \cap Sing(\mathcal{G}_1)} Z(\mathcal{G}_1, E_1, q).$$

注意到 $Sing(\mathcal{G}_1) \subseteq Sing(\mathcal{F}_1)$, 故由归纳假设, $Z(\mathcal{F}_1, E, q) \geq Z(\mathcal{G}_1, E, q)$ 对任何 $q \in Sing(\mathcal{G}_1)$ 成立. 当 $q \notin Sing(\mathcal{G}_1)$, 这个不等式显然也成立. 因此 $\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) \geq \mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f)$. (注: 这个不等式也能直接证明, 见习题 6.14.)

由习题 6.12 (3) 的结论, 我们有

$$Z(\mathcal{F}, C', p) = \sum_{q \in E_1 \cap Sing(\mathcal{F}_1)} Z(\mathcal{F}_1, \widetilde{C}', q) + \mathrm{mult_p(C')}(\mathrm{ord}_p(\mathcal{F}) - \mathrm{mult_p(C')}),$$
$$Z(\mathcal{G}, C', p) = \sum_{q \in E_1 \cap Sing(\mathcal{G}_1)} Z(\mathcal{F}_1, \widetilde{C}', q) + \mathrm{mult_p(C')}(\mathrm{ord}_p(\mathcal{G}_f) - \mathrm{mult_p(C')}),$$

由归纳假设以及前面已证的结论 (1), 即得 (2). ■

推论 2.9.1 ([Bru97]) *在命题 2.9.1 的记号与假设下, 我们有*

$$Z(\mathcal{F}, C', p) \geq Z(\mathcal{G}_f, C', p) = (C' C'')_p \geq 0,$$

这里 $C'' = C \setminus C'$.

推论 2.9.2 (**平面叶状的庞加莱问题** [CarM94]) *设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 它不经过 $\mathcal{F}$ 的任何多临界点, 那么* $\deg C \leq \deg \mathcal{F} + 2$.

证明 由 Camacho-Sad 公式及 Carnicer 不等式, 我们有

$$(\deg \mathcal{F} + 2 - \deg C) \deg C = N_{\mathcal{F}} C - C^2 = \sum_{p \in C} Z(\mathcal{F}, C, p) \geq 0.$$

这就得到结论. ■

2.10 绕异性

设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状, $p \in X$ 是 $\mathcal{F}$ 的正则点, U 是包含 p 的小邻域, 使得 $U \cap Sing(\mathcal{F}) = \emptyset$. 这样, $\mathcal{F}$ 在 U 上有局部的首次积分 $f \in \mathcal{O}_{U,p}$ (即 $df \wedge \omega = 0$). 我们可以构造 $\mathcal{F}$ 在 p 处的**横截面** (Transversal section)

$$\Sigma_p := \{q \in U |\, g(q) = 0\},$$

这里 $g \in \mathcal{O}_{U,p}$, 使得 Σ_p 和 f 给出的叶构成局部坐标系 (即 $\mathcal{F}$ 在 Σ_p 上处处横截交). Σ_p 上每个点都有唯一的叶 $f = t$ 经过它, 因而这就给出了 Σ_p 上的局部坐标.

另取 $q \in U$, 设 Σ_q 是 $\mathcal{F}$ 在 q 处的横截面. 我们有唯一的双全纯映射

$$h : \Sigma_p \longrightarrow \Sigma_q, \quad z \to h(z),$$

这里 h 按如下方式定义: 过 z 的唯一叶和 Σ_q 也有唯一的交点 $h(z)$ (详细的叙述参见 [Mov15, 第 5.2 节]).

设 L 是 $\mathcal{F}$ 的叶, $\delta : [0,1] \to L$ 是 L 的道路 (允许有限个自交点), $\delta(0) = p$, $\delta(1) = q$. 选取 δ 的有限开覆盖 $U_1, \ldots, U_n$, 使得 $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$. 取 $p_i \in U_{i-1} \cap U_i \cap \delta$ ($p_0 = p$, $p_{n+1} = q$). 设 Σ_{p_i} 是 $\mathcal{F}$ 在 p_i 处的横截面. 由上面讨论, 我们有双全纯映射 $h_i : \Sigma_{p_i} \to \Sigma_{p_{i+1}}$. 这样, 我们得到复合映射

$$h := h_n \ldots h_0 : \Sigma_p \to \Sigma_q.$$

h 被称为 (沿着 δ) 从 Σ_p 到 Σ_q 的**绕异性映射** (Holonomy map). 当 $p = q$, δ 是简单环路时, $h : \Sigma_p \to \Sigma_p$ 称为 $\mathcal{F}$ 沿着 δ 在 Σ_p 中的**绕异性** (Holonomy).

注 2.10.1 对实数情形的叶状结构, 上述的绕异性 h 也被称为庞加莱第一回归映射 (Poincaré first return map). ■

为方便讨论, 我们引入一些记号. 设 U_δ 是 δ 的邻域. 设 $t \in [0,1]$, $z \in U_\delta$ 是接近 $\delta(t)$ 的点, L_z 是过 z 的叶, $k(z) = \Sigma_p \cap L_z$. $\delta|_{[0,t]}$ 可以提升到 L_z 中从 $k(z)$ 到 z 的道路 $\delta_{k(z),z}$. 这就给出全纯映射 $k : \Sigma_q \to \Sigma_p$. 易知 $h = k^{-1}$.

回顾式 (2-10), $d\omega = \beta \wedge \omega$. β 在每一条叶上都是唯一确定的 1-形式 (即不依赖于 β 的选取). 我们记 $\frac{d\omega}{\omega} := -\beta$. 我们定义 U_δ 上的函数

$$g_\omega(z) = \exp\left(\int_{\delta_{k(z),z}} -\frac{d\omega}{\omega}\right)$$

命题 2.10.1 *设 $a = \delta(t_1)$, $b = \delta(t_2)$ $(0 \le t_1 \le t_2 \le 1)$, $h : \Sigma_a \to \Sigma_b$ 是沿着 $\delta|_{[t_1,t_2]}$ 的绕异性映射. 我们有*

(1) $d(\frac{\omega}{g_\omega}) = 0$;

(2) $h^*(\frac{\omega}{g_\omega}|_{\Sigma_b}) = \frac{\omega}{g_\omega}|_{\Sigma_a}$

证明 这可以归结为局部问题.

(1) 设 $q \in \delta$, U 是 q 的小邻域. 考虑 U 的局部坐标 (x,y), 使得过 p 的叶 L_p 由方程 $y = 0$ 定义, 且 $\omega = B(x,y)dy$, $\frac{d\omega}{\omega} = A(x,y)dx$.

取定 $c=(x_1,0)\in U\cap\delta$, $r=\Sigma_c\cap L_z$. 令 $g(z)=\int_{k(z)}^{z}\frac{d\omega}{\omega}$. 于是

$$g(z)=\int_{k(z)}^{r}\frac{d\omega}{\omega}+\int_{r}^{z}\frac{d\omega}{\omega}.$$

上式右端的前一积分是 y 的函数, 记为 $s(y)$. 因此

$$dg=s'(y)dy+Adx+(\int_{x_1}^{x}\frac{\partial A(\xi,\eta}{\partial\eta}d\xi)dy.$$

因此 $dg\wedge\omega=Adx\wedge Bdy=\frac{d\omega}{\omega}\wedge\omega$. 注意到 $g_\omega=e^g$, 故有

$$d(\frac{\omega}{g_\omega})=e^{-g}(-dg\wedge\omega+d\omega)=e^{-g}(-\frac{d\omega}{\omega}\wedge\omega+d\omega)=0.$$

(2) 设 $\frac{\omega}{g_\omega}=Gdy$, 那么由上可知 $G=G(y)$ 只依赖于 y. 取定 $d=(x_2,0)\in\delta\cap U$. 我们有

$$h^*(\frac{\omega}{g_\omega}\big|_{\Sigma_d})=h^*(G\big|_{\Sigma_d})d(h^*(y\big|_{\Sigma_d}))=Gdy\big|_{\Sigma_c}=\frac{\omega}{g_\omega}\big|_{\Sigma_c}.$$

至此完成证明. ■

推论 2.10.1 $h^*(\omega|_{\Sigma_q})=\exp(-\int_{\delta_{z,h(z)}}\frac{d\omega}{\omega})\cdot\omega|_{\Sigma_p}$. 特别地, 分别选取 Σ_p,Σ_q 的合适坐标 $z,\bar{z}$, 使得 $z(p)=\bar{z}(q)=0$, 且 $\omega|_{\Sigma_1}=dz$, $\omega|_{\Sigma_1}=d\bar{z}$. 那么

$$h'(z)=\exp(-\int_{\delta_{z,h(z)}}\frac{d\omega}{\omega}).$$

这样, 我们就得到如下经典结论.

定理 2.10.1 (**庞加莱公式**) 设 L 是 $\mathcal{F}$ 的叶, δ 是 L 中的简单闭环路, $p\in\delta$, Σ 是 $\mathcal{F}$ 在 p 处的横截面, $h:\Sigma\to\Sigma$ 是沿着 δ 的绕异性. 那么

$$h'(p)=\exp\left(\int_{\delta}-\frac{d\omega}{\omega}\right).$$

第三章　有理首次积分

设 $\mathcal{F}$ 是曲面 X 上的叶状结构, $\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 是对应的微分场. 如果存在一个 X 上的有理函数 f, 使得 $df \wedge \omega = 0$, 我们就称 f 是*有理首次积分* (Rational first integral), 或 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分 (或者 $\mathcal{F}$ 是代数可积的, algebraically integrable). 条件 $df \wedge \omega = 0$ 也等价于 $\omega = gdf$, 这里 g 是有理函数.

哪些叶状结构存在有理首次积分? 这就是著名的*庞加莱问题*. 在平面叶状结构情形, 按照庞加莱的想法, 只要不变曲线的次数上界能够被叶状结构的次数控制住, 那么我们就能通过确定不变曲线的代数方程的系数来解决庞加莱问题. 在某些特殊条件下, 这是可以做到的 (比如推论 2.9.2).

3.1　Darboux 定理

假设 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分 $f = \frac{F}{G}$ (F, G 是多项式). 注意到 $df = \frac{GdF - FdG}{G^2}$, 因此

$$\omega \wedge (GdF - FdG) = 0.$$

因而 $GdF - FdG$ 给出的叶状显然有有理首次积分 f.

命题 3.1.1　*假设 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分 $f = \frac{F}{G}$, 那么由方程 $F - tG = 0$ ($t \in \mathbb{P}^1$) 定义的曲线是 $\mathcal{F}$-不变.*

证明　这来自于 $\omega \wedge (dF - tdG) = (F - tG)(\omega \wedge \frac{dG}{G})$. ■

对平面叶状结构, 有如下著名的 Darboux 定理.

定理 3.1.1 (Darboux 定理)　*设 $\mathcal{F}$ 是 d 次平面叶状结构. 如果它有至少 $\frac{1}{2}(d+1)d+3$ 条 $\mathcal{F}$-不变曲线, 那么 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分.*

证明　设 $r = \frac{1}{2}(d+1)d+3$, $C_1, \ldots, C_r$ 是 $\mathcal{F}$ 不变曲线. 回顾 $\mathcal{F}$ 在仿射坐标 (x, y) 下的标准表达式 (1-5)

$$(P(x,y) + xR(x,y))\frac{\partial}{\partial x} + (Q(x,y) + yR(x,y))\frac{\partial}{\partial y} \in H^0(X, T_X(d-1)),$$

这里 $\max\{\deg P, \deg G\} \leq d$, R 是 d 次齐次多项式. 设 $f_i = 0$ 是 C_i 的仿射方程. 由命题 1.3.1, 我们可以有

$$\omega \wedge \frac{df_i}{f_i} = g_i dx \wedge dy,$$

这里 g_i 是多项式. 展开上时即得

$$(P + xR)\frac{\partial f_i}{\partial x} - (Q + xR)\frac{\partial f_i}{\partial y} = f_i g_i.$$

由此可知 $\deg g_i \leq d$. 将上式左右的最高次项取出 (不妨设 $\deg f_i = m_i$, 以 $(f_i)_{m_i}$ 表最高次项), 可得

$$xR\frac{\partial (f_i)_{m_i}}{\partial x} - yR\frac{\partial (f_i)_{m_i}}{\partial y} = (f_i)_{m_i}(g_i)_d.$$

这意味着 $(g_i)_d = c_i R$ (c_i 是常数). 因此可设

$$g_i = p_i + c_i R, \quad \deg p_i \leq d-1.$$

考虑向量空间 $\mathbb{C}[x,y]_{\leq d-1} = \{p \in \mathbb{C}[x,y] | \deg p \leq d-1\}$ 及子空间 $V = Span\langle p_1, \ldots, p_r\rangle$. 我们有

$$m := \dim_{\mathbb{C}} V \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x,y]_{\leq d-1} = \frac{1}{2}(d+1)d.$$

不妨设 $p_1, \ldots, p_m$ 是 V 的一组基. 我们取 $p_{m+1}, p_{m+2}, p_{m+3}$. 于是存在 $\mathbb{C}$-线性表达式

$$\begin{cases} 0 = p_{m+1} + \sum\limits_{i=1}^{m} r_i p_i, \\ 0 = p_{m+2} + \sum\limits_{i=1}^{m} s_i p_i, \\ 0 = p_{m+3} + \sum\limits_{i=1}^{m} t_i p_i. \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{df_{m+1}}{f_{m+1}} + \sum\limits_{i=1}^{m} r_i \frac{df_i}{f_i}, \\ \alpha_2 = \frac{df_{m+2}}{f_{m+2}} + \sum\limits_{i=1}^{m} s_i \frac{df_i}{f_i}, \\ \alpha_3 = \frac{df_{m+3}}{f_{m+3}} + \sum\limits_{i=1}^{m} t_i \frac{df_i}{f_i}. \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} \omega \wedge \alpha_1 = (c_{m+1} + \sum\limits_{i=1}^{m} r_i c_i) R dx \wedge dy, \\ \omega \wedge \alpha_2 = (c_{m+2} + \sum\limits_{i=1}^{m} s_i c_i) R dx \wedge dy, \\ \omega \wedge \alpha_3 = (c_{m+3} + \sum\limits_{i=1}^{m} t_i c_i) R dx \wedge dy. \end{cases}$$

如果上述三项不全为零 (不妨设 $\omega \wedge \alpha_3 \neq 0$), 我们取合适的常数 γ_1, γ_2, 使得 $\beta_i = \alpha_i - \gamma_i \alpha_3$ ($i = 1, 2$) 满足 $\omega \wedge \beta_i = 0$. 如果三项均为零, 则直接取 $\beta_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2$). 因此, 总存在有理函数 f, 使得

$$\beta_1 = f \beta_2.$$

注意到 β_1, β_2 分别含有 $\frac{df_{m+1}}{f_{m+1}}, \frac{df_{m+2}}{f_{m+2}}$, 因此 f 不可能是常数, 即 $df \neq 0$. 由于 $d\beta_1 = 0$, 故 $df \wedge \beta_2 = 0$, 这意味着 $df \wedge \omega = 0$, 即 f 是 $\mathcal{F}$ 的首次积分. ■

注 3.1.1 如果 $R = 0$ (即无穷远直线 L_∞ 是 $\mathcal{F}$-不变的, 见例 1.3.2), 那么只要有 $\frac{1}{2}(d+1)d + 2$ 条不变曲线就能保证 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分. ■

3.2 对数叶状结构与有理首次积分

仿照定理 **??**, 我们可得到如下经典结论.

定理 3.2.1 (Castelnuovo-de Franchis) 如果 $h^0(X, N_{\mathcal{F}}^{\vee}) \geq 2$, 那么 $\mathcal{F}$ 是有某个纤维化 $f : X \to C$ 诱导, 且 $g(C) \geq 2$.

为了进一步研究有理首次积分, 我们需要引入对数 1-形式及对数叶状结构. 设 C 是一条曲线, $U \subseteq X$ 是开集, ω 是 U 上的半纯 1- 形式, 满足如下条件: 对任何 $p \in U$, 存在含 p 的开子集 V, 使得

$$\omega|_V = \omega_0 + \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{df_i}{f_i},$$

这里 ω_0 是 V 上的全纯 1-形式, $f_i = 0$ 是 C 在 p 处的局部不可约分支 C_i 的方程. ω 的极点部分都落在 C 上, 并且是一阶的. 我们称这样的 ω 为极点在 C 上的对数 1-形式 (Logarithmic 1-form). 极点在 C上的 对数 1-形式构成了对数微分层 $\Omega^1_X(\log C)$. 这是凝聚层, 在 C 上非正规交奇点之外都是局部自由的. 当 C 是正规交时, 我们已经在第 **??** 节讨论过一些基本性质. 一般情形下, 我们也有类似式 (**??**) 的正合列

$$0 \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X(\log C) \xrightarrow{Res} \mathcal{O}_{\widetilde{C}} \longrightarrow 0,$$

这里 $\sigma : \widetilde{C} \to C$ 是 C 的正规化. 设 $\widetilde{C}_i$ 是 C_i 的严格原像, 那么 $Res(\omega)|_{\widetilde{C}_i} = \sigma^*(g_i|_{C_i})$.

设 $\mathcal{F}$ 是叶状结构, ω 是对应的微分场, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线. 设 $p \in C$, V 是 p 的邻域, $f = 0$ 是 $C \cap V$ 的局部既约方程. 当 p 是 C 的光滑点或结点时, $\frac{\omega}{f}$ 是沿着 C 有一阶极点的半纯微分. 利用命题 1.3.1 (5), $d(\frac{\omega}{f}) = \frac{d\omega}{f} - \frac{\tilde{\eta}}{f}$ 沿着 C 也有一阶微分, 因而此时 $\frac{\omega}{f}$ 是对数形式. 当 p 是 C 的非正规交奇点时, $\frac{\omega}{f}$ 在 p 附近未必是对数形式.

定义 3.2.1 (**对数叶状结构**) *如果 $\frac{\omega}{f}$ 在 p 附近是对数的, 我们就说 $\mathcal{F}$ 在 p 处沿着 C 是对数的. 如果 $\mathcal{F}$ 在 C 上每个点处都是对数的, 就称 $\mathcal{F}$ 是 (X, C) 上的对数叶状结构* (Logarithmic foliation).

例 3.2.1 (1) 任何对数 1-形式 (假设没有一维零点)显然诱导了 (X, C) 的一个对数叶状结构, 这里 C 是它的极点除子.
(2) 如果 C 是正规交的, 并且 C 是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么 $\mathcal{F}$ 当然是 (X, C) 上的对数叶状结构. ■

对数叶状也有如下正合列

$$0 \longrightarrow N^\vee_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_X(C) \longrightarrow \Omega^1_X(\log C) \longrightarrow \mathscr{I}_{Z'}(K_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0, \quad Z' \subseteq Sing(\mathcal{F}). \tag{3-1}$$

类似地, 我们得到

定理 3.2.2 (**对数** Castelnuovo-de Franchis **定理**) *设 C 是 X 中的曲线, $\mathcal{F}$ 是 (X, C) 的对数叶状结构, 满足 $h^0(X, N^\vee_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_X(C)) \geq 2$, 那么 $\mathcal{F}$ 是纤维化.*

Bogomolov 定理 (定理 **??**) 也可以推广到对数情形.

定理 3.2.3 (**对数** Bogomolov **定理**) *设 $\mathcal{F}$ 是 (X, C) 上的对数叶状结构, 于是*

$$kod(N^\vee_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_X(C)) \leq 1.$$

等号成立时, $\mathcal{F}$ 是纤维化.

定理 3.2.4 (Jouanolou **定理** [Jou78]) *设 $\mathcal{F}$ 是叶状结构, 有至少 $N = h^0(X, K_{\mathcal{F}}) + h^{1,1}(X) - q(X) + 2$ 条不可约 $\mathcal{F}$-不变曲线. 那么 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分.*

证明 虽然 $\mathcal{F}$ 未必是 (X,C) 上的对数叶状结构, 但仍有限制映射 $res:\Omega^1_X(\log C)\to K_{\mathcal{F}}$, 其核是 $N^\vee_{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{O}_X(C)$ 的子层. 因此

$$h^0(X,\Omega^1_X(\log C))\le h^0(X,K_{\mathcal{F}})+h^0(X,N^\vee_{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{O}_X(C)).$$

由正合列 (3-1), 我们有

$$h^0(X,\Omega^1_X(\log C))\ge N+q(X)-h^{1,1}(X)=h^0(X,K_{\mathcal{F}})+2.$$

结合这两个不等式得 $h^0(X,N^\vee_{\mathcal{F}}\otimes\mathcal{O}_X(C))\ge 2$. 剩下的证明与前面类似. ■

推论 3.2.1 (Darboux) *$\mathcal{F}$ 有有理首次积分当且仅当它有无限多条 $\mathcal{F}$-不变曲线.*

第四章　叶状结构的双有理几何

4.1　相对极小模型与极小模型

如果一个叶状结构只有既约奇点, 我们就称之为*既约叶状结构* (Reduced foliation). Seidenberg 解消定理任何叶状结构都可以通过一系列爆发变成既约叶状结构. 这样得到的叶状结构通常并不唯一. 因此我们希望能引入某种极小模型.

定义 4.1.1　*设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, E 是 X 上的一条 (-1)-曲线, $\sigma : (X, E) \to (X', p)$ 收缩 E 到 p, $\mathcal{F}'$ 是 X' 上由 σ 诱导的叶状结构. 如果 p 是 $\mathcal{F}'$ 的正则点或既约奇点, 则称 E 是 $\mathcal{F}$-例外曲线* ($\mathcal{F}$-exceptional curve).

通过直接计算可知, 如果 E 是 $\mathcal{F}$-例外曲线, 那么 E 是 $\mathcal{F}$-不变的, 并且对应如下几类情形:

(1) $\{q\} = Sing(\mathcal{F}) \cap E$. 收缩 E 后, p 是 $\mathcal{F}'$ 的正则点.

(2) $\{q_1, q_2\} = Sing(\mathcal{F}) \cap E$, 其中 q_1, q_2 均为非退化的既约奇点. 此时, p 是 $\mathcal{F}'$ 的非退化奇点.

(3) $\{q_1, q_2\} = Sing(\mathcal{F}) \cap E$, 其中 q_1 为非退化的既约奇点, q_2 是鞍- 结点. 此时, p 是 $\mathcal{F}'$ 的鞍-结点 (参看例 2.2.2).

若一个既约叶状结构 $\mathcal{F}$ 没有 $\mathcal{F}$-例外曲线, 我们就称之为*相对极小的* (Relatively minimal). 相对极小的另一种等价描述如下.

命题 4.1.1　*既约叶状结构 $(X, \mathcal{F})$ 是相对极小的当且仅当如下条件成立: 对任何既约叶状结构 $(Y, \mathcal{G})$, 若存在双有理态射 $\sigma : (X, \mathcal{F}) \longrightarrow (Y, \mathcal{G})$ 将 $\mathcal{F}$ 映为 $\mathcal{G}$, 那么 σ 是双全纯的.*

证明　($\Longrightarrow$) 如果 σ 不是双全纯的, 那么 σ 是有限步收缩的复合. 但 $\mathcal{F}$ 是相对极小的, 没有 $\mathcal{F}$-例外曲线, 因而任何收缩都会出现非既约奇点. 另一方面, 由于既约叶状结构的爆发都只产生既约奇点, 这就得到矛盾!

($\Longleftarrow$) 如果 $(X, \mathcal{F})$ 不是相对极小, 则存在 $\mathcal{F}$-例外曲线 E. 考虑收缩 E 的态射 $\sigma : (X, \mathcal{F}) \to (X, \mathcal{F}_0)$. 由假设条件, σ 是双全纯, 矛盾! ■

命题 4.1.2　*任何叶状结构都有相对极小模型.*

证明　由 Seidenberg 定理, 存在 $(X, \mathcal{F})$ 的既约模型 $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$. 如果 $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{F}})$ 不是相对极小的, 则存在 $\widetilde{\mathcal{F}}$-例外曲线. 收缩这条例外曲线后, 我们得到新的既约模型. 以此类推, 有限步后即得相对极小模型. 这里之所以能保证是有限步, 是因为 $\rho(\widetilde{X}) := \dim_{\mathbb{Q}} NS(\widetilde{X})$ 是有限数. ■

类似相对极小的等价叙述, 我们可以进一步定义极小的概念.

定义 4.1.2　*一个相对极小的叶状结构 $(X, \mathcal{F})$ 如果满足以下性质, 则称为极小的* (Minimal): *对任何相对极小叶状结构 $(Y, \mathcal{G})$, 如果存在双有理映射 $\sigma : (X, \mathcal{F}) \dashrightarrow (Y, \mathcal{G})$ 将 $\mathcal{F}$ 映为 $\mathcal{G}$, 那么 σ 也是双全纯的.*

同样地, 极小的定义也可以按如下方式等价叙述.

命题 4.1.3 *既约叶状结构 $(X,\mathcal{F})$ 是极小的当且仅当如下条件成立: 对任何既约叶状结构 $(Y,\mathcal{G})$, 若存在双有理映射 $\sigma:(Y,\mathcal{G})\dashrightarrow(X,\mathcal{F})$, 那么 σ 是态射.*

证明 ($\Longrightarrow$) 考虑 $(Y,\mathcal{G})$ 的相对极小模型 $(Y_0,\mathcal{G}_0)$ 及相应的收缩映射 $\tau:(Y,\mathcal{G})\to(Y_0,\mathcal{G}_0)$. 于是我们有分解 $\sigma:=\rho\tau$, 这里 $\rho:(Y_0,\mathcal{G}_0)\dashrightarrow(X,\mathcal{F})$ 是双有理映射. 由于 $\mathcal{F}$ 是极小的, 因而 ρ 是双全纯的. 因此 σ 是态射.

($\Longleftarrow$) 首先, $(X,\mathcal{F})$ 不含 $\mathcal{F}$-例外曲线. 若不然, 设 $\varphi:(X,\mathcal{F})\to(X',\mathcal{F}')$ 是收缩该例外曲线的映射. 由假设条件, φ^{-1} 是态射, 这就得到矛盾! 因此, $(X,\mathcal{F})$ 是相对极小的.

设 $(Y,\mathcal{G})$ 是任何相对极小的叶状结构, 并且有双有理映射 $\sigma:(X,\mathcal{F})\dashrightarrow(Y,\mathcal{G})$. 由假设条件, σ^{-1} 是态射. 由于 $(Y,\mathcal{G})$ 是相对极小的, 因而由命题 4.1.1 知 σ^{-1} 是双全纯, 故 σ 亦然. 这就推出 $(X,\mathcal{F})$ 是极小的. ■

例 4.1.1 (**纤维化的极小正规交模型**) 设 $f:X\to C$ 是亏格 g 纤维化, $\mathcal{F}$ 是由 f 诱导的叶状结构. $\mathcal{F}$ 是既约的当且仅当 f 的所有纤维都是正规交曲线. $\mathcal{F}$ 是相对极小的等价于 f 所有纤维都是正规交的并且其中任何 (-1)-曲线都至少交三个点, 此时 f 称为*极小正规交模型* (Minimal normal-crossing model). 请读者注意, f 的相对极小模型和 $\mathcal{F}$ 的相对极小模型是完全不同的 (只有在 $g=0$ 时两者一致). 当 $g>0$ 时, 极小正规交模型是唯一的, 因而也是 $\mathcal{F}$ 的极小模型就是相对极小模型. ■

4.2 没有极小模型的叶状结构

我们的下一个目标是分类那些没有极小模型的叶状结构. 先看几个例子.

例 4.2.1 (**有理纤维化**) 设 $f:X\to C$ 是有理纤维化 (即一般纤维是光滑有理曲线), $\mathcal{F}$ 是由 f 诱导的叶状结构. 这里存在经典的 flip 变换. 具体言之, 不妨设 $\mathcal{F}$ 是相对极小的 (即 f 是几何直纹面). 取 f 的一般纤维 F 及 $p\in F$, 爆发 p 点后得到例外曲线 E,且 F 变为一条 (-1)-曲线 $\widetilde{F}$. 收缩 $\widetilde{F}$, 那么 E 变为新的几何直纹面 $f':X'\to C$ 的纤维, 其诱导叶状记为 $\mathcal{F}'$. 显然有双有理映射 $(X,\mathcal{F})\dashrightarrow(X',\mathcal{F}')$. 但它不可能是态射. 因此 $\mathcal{F}$ 没有极小模型. ■

例 4.2.2 (**非平凡的** Riccati **叶状结构**) 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的相对极小 Riccati 叶状结构, φ 是适配的直纹面. 如果 φ 包含一条光滑 $\mathcal{F}$-不变纤维 F, 使得 F 上有两个不同的既约奇点, 我们就说 $\mathcal{F}$ 是非平凡的, F 称作*正则纤维*. 按照例 2.2.4 的讨论, F 要么是半退化纤维, 要么是带两个形如 $\lambda wdz-zdw=0$ 的非退化纤维.

我们对其中一个奇点做爆发, 并且收缩掉原来的纤维, 这就得到另一相对极小叶状结构 $(X',\mathcal{F}')$. 这个双有理映射 $(X,\mathcal{F})\dashrightarrow(X',\mathcal{F}')$ 不可能是态射. 因此非平凡 Riccati 叶状结构不可能有极小模型. ■

例 4.2.3 (**非常特殊叶状结构**) 采用例 1.2.6 和例 1.3.4 的记号与假设. 此时对 C 的结点做爆发并收缩 C 的严格原像 (这是 (-1)-曲线). 那么例外曲线变成一条带一个结点的不变曲线且自交数为 3. 这仍是非常特殊叶状结构 (见命题 4.2.1). 但是两者并不是双全纯的. ■

命题 4.2.1 ([Bru15]) 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, $C \subset X$ 是带一个结点 p 的 $\mathcal{F}$- 不变有理曲线且 $C^2 = 3$. 假设 p 也是 $\mathcal{F}$ 在 C 上的唯一奇点, 那么存在双有理映射 $(X, \mathcal{F}) \dashrightarrow (Y, \mathcal{G})$ 使得 $\mathcal{G}$ 是非常特殊叶状结构.

引理 4.2.1 如果 $(X, \mathcal{F})$ 是没有极小模型的既约叶状结构, 那么它双有理于一个既约叶状结构 $(X_0, \mathcal{F}_0)$, 使得 $(X_0, \mathcal{F}_0)$ 包含两条相交的 $\mathcal{F}_0$-例外曲线.

证明 由命题 4.1.3, 存在非态射的双有理映射 $\sigma : (Y, \mathcal{G}) \dashrightarrow (X, \mathcal{F})$. 通过 $(Y, \mathcal{G})$ 的爆发, 我们可以诱导如下交换图.

$$\begin{array}{ccc} & (\widetilde{Y}, \widetilde{\mathcal{G}}) & \\ {\scriptstyle\rho}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\tilde{\sigma}} \\ (Y, \mathcal{G}) & \overset{\sigma}{\dashrightarrow} & (X, \mathcal{F}) \end{array}$$

我们可以假设 ρ 是极小的爆发, 即不存在同时被 ρ 和 $\tilde{\sigma}$ 收缩的 (-1)-曲线. 因此, $\widetilde{Y}$ 包含一条自交数 (-1) 的例外曲线 C (注意它是 $\widetilde{\mathcal{G}}$-例外曲线), 它不被 $\tilde{\sigma}$ 收缩. 由于 $\mathcal{G}$ 是既约的, 所以 C 是 $\widetilde{G}$- 例外曲线. $\tilde{\sigma}$ 的例外集必须和 C 相交, 否则 $\tilde{\sigma}$ 在 C 的邻域上双全纯, 因而 $\tilde{\sigma}(C)$ 也是 $\mathcal{F}$- 例外的, 矛盾! 因此我们可以将 $\tilde{\sigma}$ 分解为

$$(\widetilde{Y}, \widetilde{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\sigma_1} (X_0, \mathcal{F}_0) \xrightarrow{\sigma_2} (X, \mathcal{F}),$$

这里 σ_1 在 C 的邻域上双全纯 (不影响自交数), σ_2 的例外集中包含例外的 (-1)- 曲线 $C' \subset X_0$ 与 $\sigma_1(C)$ 相交. 由于 $\mathcal{F}$ 既约, 故 C' 是 $\mathcal{F}_0$- 例外曲线. 又因为 σ_1 的选取, 所以 C 也是 $\mathcal{F}_0$-例外曲线. ■

命题 4.2.2 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, 且没有极小模型. 那么 $\mathcal{F}$ 双有理等价于如下几类叶状结构之一:

(1) 有理纤维化;

(2) 非平凡的 Riccati 叶状结构;

(3) 非常特殊叶状结构.

证明 由引理 4.2.1, $(X, \mathcal{F})$ 双有理于 $(X_0, \mathcal{F}_0)$, 后者包含相交的 $\mathcal{F}_0$- 例外曲线 C_1, C_2. 设 $p \in C_1 \cap C_2$. 由于 $Z(\mathcal{F}_0, C_i, p) = 1$, 所以 p 是非退化既约奇点. 另外, $C_1 C_2 \leq 2$ 且它们横截相交 (否则收缩其中一条, 将产生非既约点).

下面我们分情况讨论. 先考虑 C_1, C_2 仅交一点的情形. 我们收缩 C_1 (对应的叶状结构记为 $\mathcal{F}_1$, 收缩点记为 q), 则 C_2 变为自交数为 0 的光滑有理曲线 F, 且收缩点 q 要么是 $\mathcal{F}_1$ 的正则点要么是满足 $Z(\mathcal{F}_1, F, p) = 1$ 的既约奇点. 因此 $Z(\mathcal{F}_1, F) \leq 2$. 由习题 6.17, $\mathcal{F}_1$ 要么是有理纤维化要么是 Riccati 叶状结构 (非平凡性显然).

再考虑 $C_1 C_2 = 2$ 的情形. 此时收缩 C_1 后, C_2 的像是自交数为 3 且带一个结点的有理曲线. 因此由命题 4.2.1 可知 $\mathcal{F}$ 双有理等价于非常特殊纤维化. ■

4.3 Miyaoka 有理性判则

我们要在这一节证明如下重要定理.

定理 4.3.1 (Miyaoka **有理性判则** [Miy87]) *设 $\mathcal{F}$ 是紧复光滑代数曲面 X 上的叶状结构. 那么 $K_{\mathcal{F}}$ 不是伪有效的的充分必要条件为 $\mathcal{F}$ 双有理于一个由直纹面纤维化诱导的叶状结构.*

设 H 是丰富除子, 满足 $HK_{\mathcal{F}} < 0$. 不失一般性, 也可以假设 H 是非常丰富的, 因而 X 可以嵌入到射影空间中. 因此对充分大的素数 p, 我们可以把 X 约化到特征 p 情形. 取充分一般点 $x \in X$, 我们希望找到过 x 的一族 $\mathcal{F}$-不变的有理曲线 R 使得 RH 不超过某个常数 K (要求 K 不依赖于 x 和特征 p). 根据 [MiPe97] 的结论, 这些曲线可以提升到特征零的情形, 并且保持 $\mathcal{F}$-不变以及 RH 的上界. 这样就得到结论. 下面我们做一些准备工作.

以下我们假设 X 定义在特征 p 的代数闭域 k 上 (p 充分大). 设 v 是 $\mathcal{F}$ 在某开集 U 上对应的正则切向量场 (即没有奇点). 记 $v^n := \underbrace{v \circ v \dots v}_{n}$. 容易验证, v^p 仍然满足莱布尼兹公式, 因而也是 U 上正则向量场. 现在我们可以定义如下概念.

定义 4.3.1 (p-**封闭的叶状结构**) *如果 $\mathcal{F}$ 的任何局部正则向量场 v 诱导的 v^p 仍然和 $\mathcal{F}$ 相切 (即 $v^p \wedge v = 0$), 那么就称 $\mathcal{F}$ 是 p-封闭的 (p-close).*

这个定义之所以在整体上定义良好, 是因为我们有以下等式

$$(fv)^p = f^p v^p + v^{p-1}(f)v, \quad f \in \mathcal{O}_X(U). \tag{4-1}$$

因此 $v^p \wedge v = 0$ 蕴含着 $(fv)^p \wedge (fv) = 0$.

引理 4.3.1 *$\mathcal{F}$ 在 p 充分大时是 p-封闭的.*

证明 设 $K_{\mathcal{F}}, N_{\mathcal{F}}$ 的转移函数分别为 $g_{\alpha\beta}, \varphi_{\alpha\beta}$. 于是 $\mathcal{F}$ 对应的局部切场和微分场分别满足

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v_\beta, \quad \omega_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}\omega_\beta.$$

由式 (4-1), 我们得到

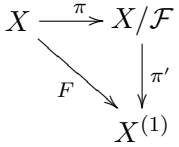
$$\omega_\alpha(v_\alpha^p) = \varphi_{\alpha\beta}\omega_\beta(g_{\alpha\beta}^p v_\beta^p + v_\beta^{p-1}(g_{\alpha\beta})v_\beta) = \varphi_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^p \omega_\beta(v_\beta^p).$$

因此 $\{\omega_\alpha(v_\alpha^p)\}_{\alpha\in I}$ 定义了 $K_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$ 的整体全纯截面. 但是注意到 $\deg_H(K_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}) < 0$ (p 充分表大), 这就迫使 $\omega_\alpha(v_\alpha^p) = 0$ ($\forall \alpha \in I$). 也就是说 v^p 和 $\mathcal{F}$ 相切, 即 $\mathcal{F}$ 是 p-封闭的. ■

接下来我们考虑 Frobenius 态射 $F : X \to X^{(1)}$. 它对应了域的包含映射 $k(X)^p \subseteq k(X)$. 设

$$k(\mathcal{F}) = \{f \in Rat(X) | v(f) = 0\}.$$

它被称为 $\mathcal{F}$ 的首次积分域 (Filed of first integrals). 显见 $k(X)^p \subseteq k(\mathcal{F}) \subseteq k(X)$. 因此 $k(\mathcal{F})$ 诱导了正规曲面 $X/\mathcal{F}$ (不一定光滑) 且满足分解



分别在 $X, X/\mathcal{F}$ 的一般点的局部邻域上选取合适的坐标 (z,w) 及 (x,y), 那么上述映射可以理解为

$$\pi(z,w)=(z^p,w)=(x,y),\quad \pi'(x,y)=(x,y^p),\quad F(z,w)=(z^p,w^p).$$

并且 $\mathcal{F}$ 由切场 $v=\frac{\partial}{\partial z}$ 给出. $X/\mathcal{F}$ 上的 p-封闭叶状结构 $\mathcal{G}$ 由 $\frac{\partial}{\partial y}$ 给出. $X^{(1)}$ 上的叶状 $\mathcal{H}$ 由 $\frac{\partial}{\partial z^p}$ 给出 (它的局部坐标为 (z^p,w^p)).

引理 4.3.2 *在上述记号与假设下, 我们有*

(1) $\pi^*K_{\mathcal{G}}=N_{\mathcal{F}}^{\vee}$, $\pi'^*K_{\mathcal{H}}=N_{\mathcal{G}}^{\vee}$,

(2) $F^*K_{\mathcal{H}}=\pi^*N_{\mathcal{G}}^{\vee}=K_{\mathcal{F}}^{\otimes p}$,

(3) $\pi^*K_{X/\mathcal{F}}=K_{\mathcal{F}}^{\otimes p}\otimes N_{\mathcal{F}}^{\vee}$.

证明 (1) 注意到 dy 是 $K_{\mathcal{G}}$ 的局部基, $dw=\pi^*dy$ 是 $N_{\mathcal{F}}^{\vee}$ 的基, 因此 $\pi^*K_{\mathcal{G}}=N_{\mathcal{F}}^{\vee}$. 同理 $\pi'^*K_{\mathcal{H}}=N_{\mathcal{G}}^{\vee}$.

(2) $F^*K_{\mathcal{H}}=\pi^*(\pi'^*K_{\mathcal{H}})=\pi^*(N_{\mathcal{G}}^{\vee})$. 另一方面, 注意到 $F^*K_{\mathcal{H}}$ 的转移函数是 $T_{\mathcal{F}}$ 的转移函数的 p 次幂, 因而 $F^*K_{\mathcal{H}}=K_{\mathcal{F}}^{\otimes p}$.

(3) 结合上面讨论及 $K_{X/\mathcal{F}}=K_{\mathcal{G}}\otimes N_{\mathcal{G}}^{\vee}$ 即得. ■

今取 X 上的一般点 x 以及 $|H|$ 中过 x 的一般元 C, 使得 C 不和 $\mathcal{F}$ 相切也不经过 $\mathcal{F}$ 的奇点, $C'=\pi(C)$. 这样 $\pi: C\to C'$ 是双有理的可分态射 (因为 π 是双射). 由引理 4.3.2, 即得

$$K_{X/\mathcal{F}}C'=\pi^*K_{X/\mathcal{F}}C=pK_{\mathcal{F}}C+N_{\mathcal{F}}^{\vee}C<0,\quad p\gg 0.$$

设 $H^{(1)}$ 是 $X^{(1)}$ 上由 H 诱导的丰富除子 (即 $F^*H^{(1)}=pH$), $H'=\pi'^*H^{(1)}$, 故 $\pi^*H'=F^*H^{(1)}=pH$. 由 [MiPe97] 的结论, 存在有理曲线 $R'\subseteq X/\mathcal{F}$ 过 $x'=\pi(x)$ 使得

$$R'H'\le\frac{4C'H'}{-K_{X/\mathcal{F}}C'}=\frac{4pCH}{pT_{\mathcal{F}}+N_{\mathcal{F}}C}\le K,$$

这里 K 是不依赖于 p 和 x 常数.

引理 4.3.3 *设 $R\subseteq X$ 是 R' 在 π 下的原像, 那么 R 是有理曲线, 它和 $\mathcal{F}$ 相切. 进一步 $RH\le K$.*

证明 由于 π 是双射, 故 R 仍是有理曲线. 假如 R 和 $\mathcal{F}$ 不相切, 那么 $\pi: R\to R'$ 是双有理的可分态射, 并且

$$K\ge R'H'=R\cdot\pi^*H'=pRH.$$

当 p 充分时, 这就迫使 $RH=0$, 矛盾! 故 R 和 $\mathcal{F}$ 相切.

此时 $\pi: R\to R'$ 是纯不可分 p 次态射, 因而

$$pRH=R\pi^*H'=pR'H'\le pK.$$

这就推出 $RH\le K$. ■

定理 4.3.1 的证明. 注意到我们可以选取一族 $C\in|H|$, 它们诱导了一族有理曲线 R 满足上面的引理. 结合本节一开始的讨论, 这就完成了证明. ■.

4.4 Mcquillan 定理

基于 Miyaoka 有理性判则, 我们以下主要讨论 $K_{\mathcal{F}}$ 是伪有效的情形. 考虑 $K_{\mathcal{F}}$ 的 Zariski 分解 (见定理 **??**)

$$K_{\mathcal{F}} = P + N.$$

这里 P 是 nef 的 $\mathbb{Q}$-除子, $N = \sum_{i=1}^{n} a_i C_i \geq 0$ 是支集在负定曲线 $C = \cup_i C_i$ 上的有效 $\mathbb{Q}$-除子, 满足 $PC_i = 0$.

我们的首要任务是分析负定部分 N 的结构. 首先, 由命题 2.4.1, 对极大 $\mathcal{F}$-链 $C = C_1 + \cdots + C_r$, 我们有

$$K_{\mathcal{F}} C_1 = -1, \quad K_{\mathcal{F}} C_i = 0 \ (i = 2, \cdots, r).$$

因此 $NC_1 < 0$, C_1 含于 N 中. 由于 $C_2 C_1 = 1$, 故若 C_2 不在 N 中的话, 那么 $PC_2 = -NC_2 < 0$, 矛盾! 故 C_2 也在 N 中. 以此类推, 可以证明C 的每分支都含于 N 中. 这也推出 $NC_i = 0$ $(i = 2, \cdots, r)$. 结合推论 2.8.2, N 的支集实际上包含了互不相交的极大 $\mathcal{F}$- 链的并集. 后面我们要证明, 在相对极小叶状结构情形, N 实际上不可能再含有其他分支了. 为此, 我们需要一些准备工作.

以下如无特别声明, 我们总假设 $\mathcal{F}$ 是相对极小叶状结构.

引理 4.4.1 *设 C 是 N 中分支. 若 $NC < 0$, 那么 C 必是某个极大 $\mathcal{F}$-链的第一分支, 且 $NC = -1$. 特别地, 如果 $N \neq 0$, 则它必含有极大 $\mathcal{F}$-链.*

证明 今设 $NC < 0$. 如果 C 不是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么

$$NC = K_{\mathcal{F}} C = -C^2 + tang(\mathcal{F}, C) > 0,$$

与假设矛盾! 故 C 是 $\mathcal{F}$-不变的. 因而有

$$-1 \geq NC = K_{\mathcal{F}} C = -\chi(C) + Z(\mathcal{F}, C) \geq 1 - \chi(C).$$

这就迫使 $Z(\mathcal{F}, C) = 1$ 且 C 是光滑有理曲线 (请注意, 由于 $C^2 < 0$, 故由推论 2.6.1, $Z(\mathcal{F}, C) \geq 1$). 由于 $\mathcal{F}$ 是相对极小的, 所以 $C^2 \leq -2$ 并且 $C \cap Sing(\mathcal{F})$ 是既约的. 这表明 C 是 $\mathcal{F}$-链，故含于某极大 $\mathcal{F}$-链中.

注意到 $N^2 < 0$ (当 $N \neq 0$), 因而 N 含分支 C 满足 $NC < 0$, 所以 N 必包含极大 $\mathcal{F}$-链. ■

我们将 N 写为

$$N = \sum_{i=1}^{s} \Theta_i + N_0,$$

这里 $\Theta_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} n_{ij} \Gamma_{ij}$ 是极大 $\mathcal{F}$-链, Γ_{ij} 是其不可约分支 (Γ_{i1} 作为第一分支), N_0 是不含在任何 $\mathcal{F}$-链中的部分. 设 T 是 N_0 支集中所有不是 $\mathcal{F}$-不变的不可约分支的并. 设 r_i 是 Θ_i 中与 T 不相交的分支的最大下标 (若每个分支都相交, 则取 $r_i = 0$). 我们定义

$$m_{ij} = \min\left\{ n_{ij}, \frac{-2}{\Gamma_{ij}^2} \right\} \ (i = 1, \cdots, r_i - 1), \quad m_{i,r_i} = \min\left\{ n_{i,r_i}, \frac{-1}{\Gamma_{i,r_i}^2} \right\}$$

并构造有效除子

$$\overline{\Theta}_i = \Theta_i - \sum_{j=1}^{r_i} m_{ij}\Gamma_{ij}, \quad \overline{N} = \sum_{i=1}^{s} \overline{\Theta}_i + N_0.$$

容易验证, $0 < m_{ij} \leq 1$, $m_{i,r_i} \leq \frac{1}{2}$.

引理 4.4.2 *设 C 是 N 中的不可约分支. 如果 C 满足以下两种情形之一, 则有*

$$(\overline{N} + T)C \geq 0.$$

(1) $C = \Gamma_{ij}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq \ell_i$.
(2) *C 是 T 中的分支.*

证明 当 $C \subset T$ 时,

$$(\overline{N} + T)C \geq (\overline{N} + C)C = (N + C)C = tang(C) \geq 0.$$

以下只需要讨论 $C = \Gamma_{ij}$ 的情形 ($j \leq r_i + 1$).

先考虑 $j < r_i$ 的情形. 若 $n_{ij} = m_{ij}$, 则 $\overline{N}$ 不含 Γ_{ij}, 因而不等式显然成立. 若 $m_{ij} < n_{ij}$, 那么

$$\overline{N}\Gamma_{ij} = N\Gamma_{ij} - m_{i,j-1} - m_{i,j+1} + 2 = (K_{\mathcal{F}}\Gamma_{ij} - m_{i,j-1}) + (2 - m_{i,j+1}) \geq -1 + 1 = 0.$$

类似可讨论 $j = r_i$ 的情形.

今设 $j = r_i + 1$. 此时利用 $\Gamma_{i,r_i+1}T \geq 1$, 可得

$$(\overline{N} + T)\Gamma_{i,r_i+1} = (K_{\mathcal{F}}\Gamma_{i,r_i+1} - m_{i,r_i}) + T\Gamma_{i,r_i+1} \geq -1 + 1 = 0.$$

如果 $j \geq r_i + 2$, 那么 $\overline{N}\Gamma_{ij} = N\Gamma_{ij} = 0$. ■

引理 4.4.3 *若 $\overline{N} + T \neq 0$, 那么存在 N_0 中的不可约分支 C_0, 满足如下条件:*
(1) $(\overline{N} + T)C_0 < 0$,
(2) *C_0 是 $\mathcal{F}$-不变的, 并且含于 N_0 的支集中.*
(3)

$$\overline{N}C_0 \geq NC_0 - \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\Gamma_{i,r_i}C_0,$$

这里指标集 $I = \{i | r_i = \ell_i\}$.
(4) $NC_0 = -\chi(C_0) + Z(\mathcal{F}, C_0)$.

证明 (1) 来自于 $(\overline{N} + T)^2 < 0$.

(2) 来自于引理 4.4.2.

(3) 首先注意到 C_0 若与 Θ_i 相交, 那么它只能交于最末的分支 Γ_{i,ℓ_i}. 由直接计算,

$$\overline{\Theta_i}C_0 = \begin{cases} \Theta_i C_0, & \text{若 } r_i < \ell_i, \\ \Theta_i C_0 - m_{i,\ell_i}\Gamma_{i,\ell_i}C_0, & \text{若 } r_i = \ell_i \end{cases}$$

后一情形中, $m_{i,\ell_i} \leq \frac{1}{2}$. 由此即得所需不等式.

(4) 来自 $NC_0 = K_{\mathcal{F}}C_0$ 及命题 2.4.1. ■

现在我们要证明如下重要结论.

定理 4.4.1 (Mcquillan[McQ00]) 设 $\mathcal{F}$ 是相对极小的叶状结构, 并且不是由直纹面纤维化诱导, $K_{\mathcal{F}} = P + N$ 是 Zariski 分解. 那么 N 的支集或为空集或由互不相交的极大 $\mathcal{F}$-链构成.

证明 仍采用前面的诸记号. 假设 $N \neq 0$. 由引理 4.4.1, N 至少包含一个极大 $\mathcal{F}$-链. 我们要证明 $\overline{N} + T = 0$. 今假设结论不成立, 我们来导矛盾.

由引理 4.4.3, 我们得到不等式

$$-\chi(C_0) + Z(\mathcal{F}, C_0) + TC_0 < \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\Gamma_{i,\ell_i}C_0. \tag{4-2}$$

另一方面, C_0 与 Γ_{i,ℓ_i} 正规交 (因为 $\mathcal{F}$ 相对极小), 每个交点对 $Z(\mathcal{F}, C_0)$ 的贡献为 1. 因此

$$Z(\mathcal{F}, C_0) \geq \sum_{i\in I}\Gamma_{i,\ell_i}C_0.$$

结合上面两个不等式, 即得

$$\frac{1}{2}Z(\mathcal{F}, C_0) < \chi(C_0) - TC_0 (\leq 2).$$

这表明 $Z(\mathcal{F}, C_0) \leq 3$ 且 C_0 是光滑有理曲线. 另一方面, $Z(\mathcal{F}, C_0) \geq 1$ (否则 $NC_0 = -2$ 与引理 4.4.1 相悖).

现在我们依次排除 $Z(\mathcal{F}, C_0)$ 的各取值. 若 $Z(\mathcal{F}, C_0) = 1$, 那么 C_0 是某个 $\mathcal{F}$-链的第一分支, 从而与引理 4.4.3 矛盾! 若 $Z(\mathcal{F}, C_0) = 2$, 则由式 (4-2), C_0 至少与一个极大 $\mathcal{F}$-链 Θ_i 相交. 这将得到更大的 $\mathcal{F}$-链, 矛盾! 若 $Z(\mathcal{F}, C) = 3$, 则式 (4-2) 蕴含着 C_0 至少与三个极大 $\mathcal{F}$-链相交. 它们与 C_0 的并集与分界线定理矛盾!

这样, 我们就证明了 $\overline{N} + T = 0$. 因而 $N_0 = 0$, 即 N 由互不相交的极大 $\mathcal{F}$-链构成. ■

推论 4.4.1 在上面的诸记号下, 我们有

$$n_{ij} \leq \frac{-2}{\Gamma_{ij}^2} \ (j = 1, \cdots, \ell_i - 1), \qquad n_{i,\ell_i} \leq \frac{-1}{\Gamma_{i,\ell_i}^2}.$$

特别地, $n_{ij} \leq 1$ $(j = 1, \cdots, \ell_i - 1)$, $n_{i,\ell_i} \leq \frac{1}{2}$.

实际上我们有严格的不等式 $n_{ij} < 1$, 此时诸系数 n_{ij} 可以由 Θ_i 唯一确定 (习题 6.19).

例 4.4.1 非常特殊叶状结构的既约模型 $\mathcal{F}$ 的典范丛 $K_{\mathcal{F}} = P + N$ 满足 $P^2 = 0$, $N^2 = -2$. ■

引理 4.4.2 的结论可以稍作推广. 我们

引理 4.4.4 设 T 是既约曲线, 其不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的. 设 r_i 是 Θ_i 中与 T 不相交的分支的最大下标 (若每个分支都相交, 则取 $r_i = 0$). 令

$$\overline{\Theta}_i = \sum_{j=r_i+1}^{\ell_i} n_{ij}\Gamma_{ij}, \quad \overline{N} = \sum_{i=1}^{s}\overline{\Theta}_i.$$

(1) $(\overline{N} + T)\Gamma_{ij} \geq 0$, 对任何 $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq \ell_i$ 成立.
(2) 进一步, 如果 $PT = 0$, 那么对 T 中任何不可约分支 C, 都有 $(\overline{N} + T)C \geq 0$.

证明 类似引理 4.4.2 的证明. ■

推论 4.4.2 设 $\overline{N}, T$ 同引理 4.4.4, 且 $PT = 0$. 设 Γ 是 T 的不可约分支. 如果 P 不是数值等价于 0, 那么

(1) $P^2 = 0$;

(2) Γ 是光滑曲线, $tang(\mathcal{F}, \Gamma) = 0$.

(3) T 的不可约分支彼此不相交;

(4) 若 $\Gamma\Theta_i > 0$, 那么 $\Gamma_{i1}\Gamma = 1$, $\Gamma_{ij}\Gamma = 0$ $(j > 1)$;

(5) 存在正有理数 γ, 使得

$$\gamma P = \Gamma + \sum_{\Theta_i \Gamma > 0} \Theta_i,$$

这里 γ 是某正有理数.

由推论 4.4.2, 我们立得如下结论.

推论 4.4.3 如果 $P^2 > 0$, Γ 是满足 $P\Gamma = 0$ 的不可约曲线, 那么 Γ 必是 $\mathcal{F}$-不变的.

下面, 我们研究满足 $PC = 0$ 的 $\mathcal{F}$-不变曲线.

引理 4.4.5 设 C 是 $\mathcal{F}$-不变的不可约曲线, 满足 $PC = 0$ 且不含于 N. 设 k 是 C 与 N_{red} 的交点个数, 则以下情形之一成立:

(1) C 是光滑椭圆曲线且不与 N 相交. 此时 $C^2 = 0$, $Z(\mathcal{F}, C) = 0$.

(2) C 是带一个结点的有理曲线且不与 N 相交. 此时 $Z(\mathcal{F}, C) = 0$.

(3) C 是有理曲线且 $k = 0, 2$. 此时

$$Z(\mathcal{F}, C) = \begin{cases} 2, \text{ 若 } k = 0, \\ 3, \text{ 若 } k = 2. \end{cases}$$

(4) C 是有理曲线且 $k = 3, 4$. 此时 $Z(\mathcal{F}, C) = k$. 进一步, 设 $F := C + \sum_{\Theta_i C > 0} \Theta_i$ (这里 Θ_i 跑遍 N 中所有和 C 相交的连通分支), 那么 F 的支集是某个单连通的奇异椭圆纤维.

证明 我们有

$$\frac{k}{2} \geq NC = K_{\mathcal{F}} C = 2p_a(C) - 2 + Z(\mathcal{F}, C) \geq 2p_a(C) - 2 + k.$$

这就迫使 $p_a(C) \leq 1$.

若 $p_a(C) = 1$, 则 $k = 0$ (即与 N 不相交), $Z(\mathcal{F}, C) = 0$. 此时 C 要么是带一个结点的有理曲线, 要么是光滑椭圆曲线. 若为后者, 则由 Carmacho-Sad 公式知 $C^2 = 0$.

以下我们假设 C 是有理曲线. 此时上述不等式推出 $k \leq 4$. 当 $k = 0$ 时, $Z(\mathcal{F}, C) = 2$. 当 $k = 1$ 时, 上面的不等式迫使 $NC = 0$ (因为它只能是整数), 矛盾!

当 $k = 2$ 时, 我们有 $NC = 1$, 因而 $Z(\mathcal{F}, C) = 3$.

当 $k \geq 3$ 时,

$$k \leq Z(\mathcal{F}, C) \leq 2 + \frac{k}{2}$$

迫使 $k = Z(\mathcal{F}, C)$.

不妨设 Γ_{i,ℓ_i} 在 Θ_i 中的系数是 $\frac{1}{\lambda_i}$, $p_i = \Gamma_{i,\ell_i} \cap C$, $CS(\mathcal{F}, C, p_i) = -\frac{\gamma_i}{\lambda_i}$ (注意 $\gcd(\gamma_i, \lambda_i) = 1$). 当 $k = 4$ 时, 所有的 $\lambda_i = 2$, $\sigma_i = 1$. 因而 $C^2 = -2$. 此时 F 是 I_0^* 型椭圆纤维型曲线.

当 $k = 3$ 时, 由前讨论以及 Carmacho-Sad 公式, 可得

$$1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i},$$

$$-C^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\sigma}{\lambda_i} < 3.$$

由直接验算可得结论. ■

结合推论 4.4.3 和引理 4.4.5 即得如下经典结论.

定理 4.4.2 (**典范模型定理** [McQ08]) *假设 $P^2 > 0$, Z 是所有满足 $PC = 0$ 的不可约曲线 C 构成的并集. 那么 Z 是以下几类曲线的并集:*

(1) *N 的支集;*

(2) *有理曲线构成的链 $C_1 + \cdots + C_r$, 每个分支均不与 N 相交, 且 $Z(\mathcal{F}, C_i) = 2$;*

(3) *有理曲线构成的链 $C_1 + \cdots + C_r$, 此时恰有两个 N 中的连通分支与 C_1 相交 (每个连通分支都恰是一条 (-2)-曲线), 其余 C_i 与 N 不相交, 且 $Z(\mathcal{F}, C_1) = 3$, $Z(\mathcal{F}, C_i) = 2$;*

(4) *有理曲线构成的圈 Γ, 满足 $Sing(\mathcal{F}) \cap \Gamma = Sing(\Gamma)$;*

(5) *带一个结点的有理曲线 Γ, 满足 $Sing(\mathcal{F}) \cap \Gamma = Sing(\Gamma)$.*

满足上述情形 (4)(5) 的连通分支称为椭圆 Gorenstein 叶 (Elliptic Gorenstein leaf).

[McQ08, Theorem IV.2.2] 还证明了下面的结论 (证明概要亦可参看 [CaFl15b]).

定理 4.4.3 *设 $\mathcal{F}$ 是相对极小的叶状结构, Γ 是椭圆 Gorenstein 叶, 那么 $K_{\mathcal{F}}\big|_{\Gamma}$ 不是挠除子.*

4.5 小平维数

我们定义 $\mathcal{F}$ 的数值小平维数 (Numerical Kodaira dimension):

$$\nu(\mathcal{F}) = \begin{cases} 0, \text{ 若 } P \sim 0, \\ 1, \text{ 若 } P \not\sim 0 \text{且 } P^2 = 0, \\ 2, \text{ 若 } P^2 > 0. \end{cases}$$

为方便起见, 对于 $K_{\mathcal{F}}$ 非伪有效情形, 我们记 $\nu(\mathcal{F}) = -\infty$. 我们还可以定义 $\mathcal{F}$ 的小平维数 (Kodaira dimension)

$$kod(\mathcal{F}) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log h^0(X, K_{\mathcal{F}}^{\otimes n})}{\log n}.$$

$kod(\mathcal{F}) = 2$ 的叶状 $\mathcal{F}$ 称为一般型叶状. 由代数几何的结果

$$kod(\mathcal{F}) \leq \nu(\mathcal{F}).$$

我们记 $p_m(\mathcal{F}) := h^0(X, K_{\mathcal{F}}^{\otimes m})$. 它们称为 $\mathcal{F}$ 的多重亏格 (Plurigenera).

命题 4.5.1 设 $(X,\mathcal{F})$ 与 $(X',\mathcal{F}')$ 是两个既约叶状结构, 并且存在双有理映射 $(X,\mathcal{F}) \dashrightarrow (X',\mathcal{F}')$, 那么 $kod(\mathcal{F}) = kod(\mathcal{F}')$ 且 $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F}')$.

证明 不失一般性, 我们考虑一次爆发 $\sigma : (X,\mathcal{F},E) \to (X',\mathcal{F}',p)$, 这里 $E = \sigma^{-1}(p)$ 是例外曲线, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}'$ 的拉回叶状结构. 如果 $p \in Sing(\mathcal{F}')$, 那么由于 $\mathcal{F}'$ 是既约的, 所以 $K_{\mathcal{F}} = \sigma^* K_{\mathcal{F}'}$. 此时结论显然成立. 今设 $p \notin Sing(\mathcal{F}')$. 我们有

$$K_{\mathcal{F}} = \sigma^* K_{\mathcal{F}'} \otimes \mathcal{O}_X(E).$$

因为 $h^0(nE, \mathcal{O}_{nE}(nK_{\mathcal{F}})) = h^0(nE, \mathcal{O}_{nE}(nE_n)) = 0$, 故由正合列

$$0 \longrightarrow \sigma^* K_{\mathcal{F}'}^{\otimes n} \longrightarrow K_{\mathcal{F}}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{O}_{nE}(nK_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0$$

可得 $h^0(X, nK_{\mathcal{F}}) = h^0(X', nK_{\mathcal{F}'})$, 因而 $kod(\mathcal{F}) = kod(\mathcal{F}')$.

$K_{\mathcal{F}}$ 伪有效当且仅当 $K_{\mathcal{F}'}$ 伪有效. 如果 $K_{\mathcal{F}'} = P' + N'$ 是 Zariksi 分解, 那么 $K_{\mathcal{F}} = \sigma^* P' + (\sigma^* N' + E)$ 是 $K_{\mathcal{F}}$ 对应的 Zariski 分解. 因此 $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F}')$. ■

定理 4.5.1 设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, 如果 $kod(\mathcal{F}) \neq \nu(\mathcal{F})$, 那么 $kod(\mathcal{F}) = -\infty$, $\nu(\mathcal{F}) = 1$.

满足 $kod(\mathcal{F}) = -\infty$ 且 $\nu(\mathcal{F}) = 1$ 的叶状称为希尔伯特模叶状 (Hilbert modular foliation). 关于它的讨论, 参见 [Bru15, Ch. 9, Sec. 5]

定义 4.5.1 设 k 是最小的整数, 使得 $h^0(X, kK_{\mathcal{F}})$ 有 $kod(\mathcal{F}) + 1$ 个代数无关的截面. 我们称 k 是 $\mathcal{F}$ 的高度 (Height), 记为 $h(\mathcal{F})$.

引理 4.5.1 设 $\mathcal{F}$ 是一般型叶状结构, $h = h(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的高度, 则 $p_{hn}(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

证明 设 $s_0, s_1, s_2 \in H^0(X, K_{\mathcal{F}}^{\otimes h})$ 是三个代数无关截面, $V = \mathbb{C}\langle s_0, s_1, s_2\rangle$. 考虑由 V 诱导的线性系映射 $\phi : X \to \mathbb{P}^2$, 则 $V = \phi^* H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$. 因而 $\phi^* H^0(\mathbb{P}^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)) \subseteq H^0(X, K_{\mathcal{F}}^{\otimes hn})$. 由此即得命题. ■

推论 4.5.1 ([Per02], **定理** 1) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构, 其极小模型是一般型的. 假设 $\mathcal{F}$ 有有理首次积分, 那么一般叶的次数有一个上界, 该界只依赖于 $\deg \mathcal{F}$, $h(\mathcal{F})$ 及一般叶的几何亏格.

证明 设 $\sigma : (\widetilde{X}, \mathcal{G}) \to (X, \mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的既约模型, F 是 $\mathcal{G}$ 诱导的纤维化的一般纤维. 考虑限制映射

$$\phi_{hn} : H^0(X, K_{\mathcal{G}}^{\otimes hn}) \to H^0(F, \Omega_F^{\otimes hn}).$$

选取合适 n, 使得 $\mathrm{Ker}\Phi_{hn}$ 非空. 注意到

$$\sigma_* H^0(X, K_{\mathcal{G}}^{\otimes hn}) \subseteq H^0(\mathbb{P}^2, K_{\mathcal{F}}^{\otimes hn}) \cong H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(hn \deg \mathcal{F} - hn)).$$

因此 $\deg \sigma(F) \leq hn \deg \mathcal{F} - hn$. ■

上面结论也可以推广到任何 $\mathcal{F}$-不变曲线的情形.

命题 4.5.2 ([Per02], **定理** 2) 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{P}^2$ 上的一般型叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 那么 $\deg C$ 有一个上界, 该上界只依赖于 $\deg \mathcal{F}$, $h(\mathcal{F})$ 和 C 的几何亏格.

我们把证明留作习题 (参见习题 6.23 和习题 6.24).

第五章　叶状结构的分类研究

5.1　全纯向量场诱导的叶状结构

$v \in H^0(X, \Omega_X)$ 被称为全纯向量场 (Holomorphic vector field). 它的零点集中的除子部分记为 D. v 诱导的叶状结构 $\mathcal{F}$ 满足 $T_{\mathcal{F}} \equiv D$. 如果 $D > 0$, 那么对任何丰富除子 H, 都有 $K_{\mathcal{F}}H = -DH < 0$. 由 Miyaoka 有理性判则, 此时 $\mathcal{F}$ 双有理于一个由直纹面纤维化诱导的叶状结构.

引理 5.1.1　*如果 $T_{\mathcal{F}} \equiv 0$, 那么 X 上的任何 (-1)-曲线 E 是 $\mathcal{F}$-不变的. 进一步, 在收缩 E 后得到的全纯向量场 $\mathcal{F}'$ 仍有 $T_{\mathcal{F}'} \equiv 0$.*

证明　设 E 是 (-1)-曲线. 因为 $K_{\mathcal{F}}E + E^2 = -1$, 所以 E 是 $\mathcal{F}$-不变的. 由式 (1-6) 及 $T_{\mathcal{F}} \equiv 0$, 即知 $T_{\mathcal{F}'} \equiv 0$. ■

以下如无特别声明, 我们总假设 X 是极小的且 $T_{\mathcal{F}} \equiv 0$.

引理 5.1.2　*如果 $\mathcal{F}$ 由纤维化 $f : X \to B$ 诱导, 那么 f 是常模椭圆纤维化, 其奇异纤维均为光滑曲线的倍数 (也称为拟椭圆纤维丛, Almost elliptic fibre bundle). 此时 $\mathcal{F}$ 没有奇点.*

证明　此时全纯切场限制在一般纤维上仍是该纤维上的全纯切场, 这意味着一般纤维要么是有理曲线要么是椭圆曲线. 若 f 的纤维是有理曲线, 那么由 Miyaoka 有理性判则, $T_{\mathcal{F}}$ 不是伪有效的, 与假设矛盾! 因而 f 是椭圆纤维化. 注意到 $f_*\omega_{X/B}$ 的正定性以及

$$0 \equiv K_{\mathcal{F}} \equiv f^*(f_*\omega_{X/B}) \otimes \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^{s}(F_{i,\mathrm{red}} - \frac{1}{m_i}F_i),$$

这里 F_i 走遍所有奇异纤维, m_i 是 F_i 的重数, 这就迫使 $\deg f_*\omega_{X/B} = 0$, 从而 f 是常模的且奇异纤维都是光滑曲线的倍数. ■

推论 5.1.1　*我们有 $kod(X) \leq 1$. 进一步, 若 $kod(X) = 1$, 则 $\mathcal{F}$ 由拟圆纤维丛诱导.*

证明　注意到 $N_{\mathcal{F}}^{\vee} = K_X$, 因此由对数 Bogomolov 定理 3.2.3, $Kod(X) \leq 1$. 进一步, 如果 $Kod(X) = 1$, 那么 $\mathcal{F}$ 由纤维化 $f : X \to B$ 诱导. 由引理 5.1.2 即知它是由拟椭圆纤维丛诱导. ■

推论 5.1.2　*如果 $q(X) > 0$, 那么 $\mathcal{F}$ 没有奇点. 进一步, 如果 $\mathcal{F}$ 不是由拟椭圆纤维丛诱导的, 则要么 $q(X) = 1, p_g(X) = 0$; 要么 $q(X) = 2, p_g(X) = 1$.*

特别地, 当 $Kod(X) = -\infty$ 且 $q(X) \geq 2$ 时, $\mathcal{F}$ 必由拟椭圆纤维丛诱导.

证明　由推论 1.3.1, 如果 $\mathcal{F}$ 有奇点, 那么 $\mathcal{F}$ 由 Albanese 纤维化诱导. 结合引理 5.1.2, $\mathcal{F}$ 没有奇点, 矛盾! 故 $\mathcal{F}$ 没有奇点. 同理, 如果 $\mathcal{F}$ 不是由拟椭圆纤维丛诱导, 则

$$p_g(X) = h^0(X, N_{\mathcal{F}}^{\vee}) = q(X) - 1.$$

当 $q(X) \geq 3$ 时, Castelnuovo-de Franchis 定理蕴含着 $\mathcal{F}$ 由纤维化诱导, 故由引理 5.1.2 知它是由拟椭圆纤维丛诱导, 矛盾! 故 $q(X) \leq 2$. ■

推论 5.1.3 *如果 $Kod(X)=0$, 那么 $\mathcal{F}$ 没有奇点. 进一步, 若它不是由拟椭圆纤维丛诱导, 则必是 Abel 曲面上的 Kronecker 叶状结构.*

证明 不妨假设 $\mathcal{F}$ 不是由拟椭圆纤维丛诱导. 因此由推论 5.1.2, 要么 $q(X)=0$, 要么 X 是 Abel 曲面, 要么 X 是双椭圆曲面. 当 X 是 Abel 曲面时, 由假设条件, $\mathcal{F}$ 是 Kronecker 叶状结构.

现在假设 X 不是 Abel 曲面. 因为 $Kod(X)=0$, 故存在正整数 $m>1$, 使得 $mK_X\equiv 0$, 因而存在无分歧的 m 次循环覆盖 $\pi: Y\to X$. 考虑 $\mathcal{F}$ 在 Y 上的拉回 $\pi^*\mathcal{F}$. 此时 $K_Y\equiv 0$, $T_Y\cong\Omega_Y$, $\pi^*\mathcal{F}$ 仍然由全纯向量场诱导, 且 $T_{\pi^*\mathcal{F}}=\pi^*T_{\mathcal{F}}\equiv 0$. 由前面的讨论, 这时 $\pi^*\mathcal{F}$ 要么由拟椭圆纤维丛诱导, 要么是 Kronecker 叶状结构. 在前一情形中, $\mathcal{F}$ 当然也是拟椭圆纤维丛诱导. 在后一情形中, 由于该覆盖次数大于 1, 根据经典结果, 此时 Kronecker 结构就是由椭圆丛诱导的 (为什么?), 因而 $\mathcal{F}$ 仍是由近椭圆纤维丛诱导. 这样, $\mathcal{F}$ 总是没有奇点. ■

推论 5.1.4 *设 $Kod(X)=-\infty$, 并且它不是由拟椭圆纤维丛诱导, 则以下情形之一成立:*
(1) $q(X)=1$, $\mathcal{F}$ 是没有不变纤维的 Riccati 纤维化. 考虑适配直纹面的单值 $\rho:\pi_1(Alb(X))\to\mathbb{P}^1$. 此时 v 被称为 ρ 的悬置(suspension).
(2) $q(X)=0$, $\mathcal{F}$ 双有理于 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上的切场 $v_1\oplus v_2$ 诱导的叶状结构, 这里 v_1, v_2 是 $\mathbb{P}^1$ 上的切向量场.

证明 由推论 5.1.2, $q(X)\le 1$.

(1) 当 $q(X)=1$ 时, Albanese 映射是直纹面映射 (底曲线亏格为 1). 对 Albanese 映射的一般纤维 F, $K_{\mathcal{F}}F=0$, 因而 $\mathcal{F}$ 是 Ricatti 叶状结构. 由推论 5.1.2, $\mathcal{F}$ 没有奇点, 因而任何纤维都不是不变的.

(2) 当 $q(X)=0$ 时, X 是 $\mathbb{P}^2$ 或 e 次 Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_e$. 为方便起见, 我们通过爆发 $\mathbb{P}^2$, 可以将它变为 $\mathbb{F}_1$.

对任何 $\mathbb{F}_e$ $(e\ge 1)$, 找截面 Γ, 使得 $\Gamma^2=-e$. 因为 $K_{\mathcal{F}}\Gamma+\Gamma^2=-e<0$, 所以 Γ 是 $\mathcal{F}$ 不变的. 此时 $Z(\mathcal{F},\Gamma)=2$. 这表明 Γ 上至多有两个奇点. 如果它有两个奇点, 那么有一条通过它的纤维上还包含 v 的另一个零点 p (参照例 2.2.4). 爆发 p, 再收缩原始的纤维, 我们得到 $\mathbb{F}_{e-1}$ 上全纯向量场 $\mathcal{F}'$, 也满足 $T_{\mathcal{F}'}\equiv 0$, 并且新的纤维上仍有 v 的另一个零点. 依此类推, 最终可以归结到 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 的情形.

现在考虑 Γ 仅有一个奇点的情形. 如果过该奇点的纤维也含有 v 的另一个零点 p, 那么类似上面的方法最终可以归结到 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 的情形. 假若该纤维没有其他奇点, 则爆发该奇点得到的新的全纯向量场的零点集包含除子, 因而该叶状双有理于某个直纹面诱导的叶状. 这与 $\mathcal{F}$ 没有一维零点集的假设矛盾! ■

综合上面的讨论, 我们得到如下定理.

定理 5.1.1 ([Bru15, McQ00]) *设 $\mathcal{F}$ 是光滑曲面 X 上具有孤立零点的全纯向量场, 那么 $K_{\mathcal{F}}\equiv 0$, 从而 $Kod(\mathcal{F})=\nu(\mathcal{F})=0$. 进一步, $\mathcal{F}$ 属于以下情形之一:*

(1) $\mathcal{F}$ 由拟椭圆纤维化诱导;

(2) $\mathcal{F}$ 由 Abel 曲面上的 Kronecker 叶状结构诱导;

(3) $\mathcal{F}$ 由某椭圆曲线 E 的表示 $\rho:\pi_1(E)\to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 的悬置诱导的叶状结构 (它是没有不变纤维的 Riccati 叶状结构);

(4) 双有理于 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上的线性切向量场诱导的叶状结构 (或等价地, 双有理于 $\mathbb{P}^2$ 上的线性切向量场诱导的叶状结构).

5.2 小平维数为 0 的叶状结构

命题 5.2.1 设 $\mathcal{F}$ 是相对极小叶状结构, 且不是有理纤维化. 如果 $\nu(\mathcal{F})=0$, 那么 $kod(\mathcal{F})=0$.

定理 5.2.1 设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, $kod(\mathcal{F})=0$, 那么 $\nu(\mathcal{F})=0$.

以下假设 $\mathcal{F}$ 是满足 $\nu(\mathcal{F})=0$ 的相对极小叶状结构. 此时 $K_{\mathcal{F}}\equiv_{\mathrm{num}} N$.

引理 5.2.1 存在正整数 n, 使得 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})>0$. 进一步, 设 $D\in|nK_{\mathcal{F}}|$, 则 $D=nN$. 特别地, 当 $n=1$ 时, $K_{\mathcal{F}}\equiv 0$.

证明 如果 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})>0$, 可取 $D\in|nK_{\mathcal{F}}|$. 将 D 分解为 $D=P'+N'$, 这里 $Supp(N')\subseteqq Supp(N)$, P' 与 N 无公共分支. 因此对 N 中的任何不可约分支 Γ, $(N'-nN)\Gamma=-P'\Gamma\le 0$, 从而 $N'\ge nN$. 对任何丰富除子 H, 有 $P'H=-(N'-nN)H\le 0$, 故 $P'=0$, $N'=nN$. 特别地, 当 $n=1$ 时, 由于 N 中每个分支的系数都严格小于 1, 所以 $D=N=0$.

如果 $q(X)=0$, 则 $Pic(X)/Pic(X)_{\mathrm{tor}}\cong NS(X)/\sim$. 这就迫使 $nK_{\mathcal{F}}\equiv nN$ 对某个充分可除的正整数 n 成立. 因而 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})>0$. 以下不妨进一步假设 $q(X)>0$ 且 $h^0(X,K_{\mathcal{F}})=0$. 由引理 1.3.1, $\mathcal{F}$ 由 Albanese 纤维化诱导. 这样, N 中的分支都落在 α 的纤维中, 从而对一般纤维 F 有 $K_{\mathcal{F}}F=NF=0$. 因此 α 是椭圆纤维化. 又因 $\nu(\mathcal{F})=0$, 故 α 是常模的. 由此可得结论. ■

设 $D\in|nK_{\mathcal{F}}|$, $D=nN$, 这里 n 是使得 $h^0(X,nK_{\mathcal{F}})>0$ 的最小者 ($n=h(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 的高度). 由此可诱导 n 次循环覆盖 $\pi_0:Y_0\to X$, 使得

$$\pi_{0*}\mathcal{O}_{Y_0}=\bigoplus_{i=0}^{n-1}\mathcal{O}_X(-iK_{\mathcal{F}}),$$

且 $D\equiv nK_{\mathcal{F}}$ 是分歧轨迹.因为 N 是正规交的, 所以 Y_0 的奇点都是 Hirzebruch-Jung 奇点. 设 $\tau:Y_1\to Y_0$ 是关于这些奇点的 Hirzebruch 解消, $\pi=\pi_0\tau$, $\rho:Y_1\to Y$ 是收缩 π^*N 中所有分支的态射.

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{\ \rho\ } & Y_1 & \xrightarrow{\ \tau\ } & Y_0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ & & X & = & X \end{array}$$

引理 5.2.2 Y 是光滑的, 即 π^*N 的支集是若干由第一类有理曲线构成的链.

证明 我们把 N 写成连通分支之和 $N=N_1+\cdots+N_r$. π^*N_i 是由若干条相同的有理曲线链构成. 因此我们只需要证明其每条链的相交矩阵的行列式的绝对值为 1 即可. 剩下的讨论留作习题 (见习题 6.18 与习题 6.20). ■

引理 5.2.3 *设 $\mathcal{G}=\pi^*\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 在 Y_1 上的拉回. 那么 $K_{\mathcal{G}}=\pi^*K_{\mathcal{F}}$. 特别地, $h^0(Y_1,K_{\mathcal{G}})>0$, $\nu(\mathcal{G})=0$.*

证明 根据例 1.3.5 的讨论, $K_{\mathcal{G}}=\pi^*K_{\mathcal{F}}+E$, 这里 E 是支集在例外曲线上的 $\mathbb{Q}$-除子. 注意到 E 中的不可约分支 C 都是 $\mathcal{G}$-不变的有理曲线, 且 E 的连通分支都是 Hirzebruch-Jung 链. 此时 $Z(\mathcal{G},C)=2$, 故有

$$EC=K_{\mathcal{G}}C=-\chi(C)+Z(\mathcal{F},C)=0.$$

这就推出 $E=0$. 此时 $K_{\mathcal{G}}\equiv\pi^*N$. 由习题 6.20 (1), 该式右边是整除子. ■

定理 5.2.2 *设 $\mathcal{H}$ 是 Y 上的叶状结构, 由 $\mathcal{G}$ 通过 $\rho:Y_1\to Y$ 得到. 那么 $\mathcal{H}$ 是全纯向量场.*

证明 由引理 5.2.2, π^*N 是一些 $\mathcal{G}$-例外曲线构成的链. 因此在收缩过程中始终保持数值小平维数 $\nu(\mathcal{G})=0$ 及 $h^0(X,K_{\mathcal{G}})>0$. 再结合引理 5.2.1, 即得 $K_{\mathcal{H}}\equiv 0$, 即 $\mathcal{H}$ 是全纯向量场. ■

5.3 小平维数为 1 的叶状结构

以下假设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, $kod(\mathcal{F})=1$. 考虑 $K_{\mathcal{F}}$ 的 Zariski 分解 $K_{\mathcal{F}}=P+N$. 此时 $\nu(\mathcal{F})=1$.

引理 5.3.1 *对充分可除的正整数 m, 线性系 $|mP|$ 是 $|mK_{\mathcal{F}}|$ 的移动部分, 即 $|mK_{\mathcal{F}}|=|mP|+mN$. 进一步, $|mP|$ 诱导了纤维化 $\varphi:X\to B$. 特别地, 对 φ 的任何纤维 F', 都有 $K_{\mathcal{F}}F'=0$.*

证明 设 $|mK_{\mathcal{F}}|=|M|+Z$, 这里 Z 是固定部分. 设 $Z-mN=A-B$, 此处 A,B 是没有公共分支的有效除子. 容易看到 $B\le mN$. 于是我们有 $M+A=mP+B$. 这就有

$$0\le(M+A)B=mPB+B^2=B^2\le 0,$$

故 $B=0$. 由于 $0=mP^2=MP+AP$, 所以 $AP=MP=0$. 因此 $M^2+MA=mMP=0$蕴含着 $AM=M^2=0$. 这就有 $A^2=mPA-MA=0$.

这样, $|M|$ 诱导纤维化 $\varphi:X\to B$ (经过 Stein 分解), 且 $A\equiv_{\text{num}}\gamma F'$, 这里 $\gamma\in\mathbb{Q}$, F' 是 φ 的纤维. φ 并不依赖于 m 的选取. 对充分大的正整数 n, $|nA|$ 没有固定部分. 因此以 nm 替代 m, 则有 $A=0$, 故 $M=mP$. ■

推论 5.3.1 *如果 $\mathcal{F}$ 与 φ 诱导的叶状一致, 那么 φ 是非常模的椭圆纤维化.*

证明 此时对 φ 的任何纤维 F', 都有 $K_XF'=K_{\mathcal{F}}F'=0$, 故 φ 是椭圆纤维化. 今假设 φ 是常模的, 我们来导矛盾.

此时

$$K_{\mathcal{F}}\equiv_{\text{num}}\chi_\varphi F'+\sum_{F'}(F'_{\text{red}}-F'_{\text{prim}}),$$

这里 F' 跑遍所有奇异纤维, F'_{prim} 指 F' 除以重纤维重数得到的除子. 注意到 F'_{prim} 都具有周期单值, 并且对其中任何分支 Γ, 都有 $\Gamma F_{\text{red}}=N\Gamma$. 再结合椭圆纤维化的奇异纤维分类, F' 要么是光滑曲线的倍数, 要么是 I_0^*,II^*,III^*,IV^* 型. 由假设, φ 是常模的, 因而

$$\chi_\varphi\equiv_{\text{num}}\sum_{F'}\chi_{F'}F',$$

这里 $\chi_{F'}$ 是 F' 的奇异纤维陈数 (见 [Tan96]). 这样,

$$K_{\mathcal{F}} \equiv_{\text{num}} \sum_{F'} \left(F'_{\text{red}} - F' + \chi_{F'} F'\right),$$

此处 F' 跑遍 I_0^*, II^*, III^*, IV^* 型的奇异纤维. 进一步, 这四类奇异纤维分别对应陈数

$$\chi_{F'} = \frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3}.$$

由直接验证即得 $K_{\mathcal{F}} \equiv_{\text{num}} N$, 即 $\nu(\mathcal{F}) = 0$, 矛盾! 故 φ 必是非常模的. ■

引理 5.3.2 设 F' 是 φ 的奇异纤维, Γ 是 F' 的不可约分支. 如果 Γ 不是 $\mathcal{F}$-不变的, 那么 Γ 是光滑的, $tang(\mathcal{F}, \Gamma) = 0$, 并且满足

$$F' = m_\Gamma \left(\Gamma + \sum_{N_i \Gamma \neq 0} N_i\right), \quad m_\Gamma \in \mathbb{Z}^+,$$

这里 N_i跑遍 N 中所有满足 $N_i\Gamma > 0$ 的连通分支. 进一步, 若 $\Gamma N_i > 0$, 则 Γ 与 N_i 的第一分支正常交于一点, 与 N_i 的其他分支不相交.

证明 由推论 4.4.2 立得. ■

推论 5.3.2 设 F' 是 φ 的奇异纤维, 则以下情形之一成立:

(1) F' 的任一不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的.

(2) 存在 F' 中唯一的不可约分支 Γ 使得它不是 $\mathcal{F}$-不变的. 在这种情形, F' 具有形如引理5.3.2 的表达式.

回顾命题 1.3.3, 我们有

引理 5.3.3 设 $\mathcal{F}$ 不是由 φ 诱导. 那么存在有效除子 D, 使得

$$K_{\mathcal{F}} = \varphi^* K_B + D + D(\varphi), \tag{5-1}$$

这里 $D(\varphi) = \sum_{F'}(F' - F'_{\text{red}})$, F' 跑遍 φ 的所有纤维. 进一步, 我们有
(1) $DF' = 0$;
(2) D 中的不可约分支都是 $\mathcal{F}$-不变的.

注 5.3.1 实际上, 当 $\mathcal{F}$ 由常模纤维化诱导时, 上述相切除子 $D = N$ (留给读者证明). ■

定理 5.3.1 设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, $kod(\mathcal{F}) = 1$, 那么 $\mathcal{F}$ 满足以下类型之一:

(1) Riccati 叶状结构;

(2) 湍流叶状结构;

(3) 非常模的椭圆纤维化;

(4) 亏格 $g \geq 2$ 的常模纤维化.

5.4 正则叶状结构

作为前面讨论的一个应用, 我们研究正则叶状结构 (Regular foliation), 即不存在奇点的叶状结构 $\mathcal{F}$. 此时, 由 Baum-Bott 公式立知 $N_{\mathcal{F}}^2 = 0$, 即

$$c_1^2(X) = K_{\mathcal{F}}^2 - 2K_{\mathcal{F}}N_{\mathcal{F}}.$$

又由 (2-1),

$$c_2(X) = -K_{\mathcal{F}}N_{\mathcal{F}} = -K_X N_{\mathcal{F}}.$$

另外, 对任何 $\mathcal{F}$-不变的曲线 C, 由推论 2.6.1 公式得 $C^2 = 0$.

当 $K_{\mathcal{F}}$ 不是伪有效的, 则由 Miyaoka 有理性判则可知, $\mathcal{F}$ 是几何直纹面. 以下如无特别声明, 均假设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的正则叶状结构且 $K_{\mathcal{F}}$ 是伪有效的.

引理 5.4.1 $K_{\mathcal{F}}$ 是 nef 的. 特别地, $K_{\mathcal{F}}^2 = c_1^2(X) - 2c_2(X) \geq 0$.

证明 任取不可约曲线 C. 若 $C^2 \geq 0$, 则 C 是 nef, 因而由 $K_{\mathcal{F}}$ 的伪有效性知 $K_{\mathcal{F}}C \geq 0$. 若 $C^2 < 0$, 那么由上面讨论可知其不是 $\mathcal{F}$-不变的, 故

$$K_{\mathcal{F}}C = -C^2 + tang(\mathcal{F}, C) > 0.$$

这就证明了 $K_{\mathcal{F}}$ 是 nef. ■

推论 5.4.1 如果 $f : X \to B$ 是亏格不超过 1 的纤维化, 那么 f 是几何直纹面或拟椭圆纤维化. 特别地, 此时 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

证明 由引理 5.4.1, $K_f^2 \geq 8\chi_f$. 因为 $\chi_f \geq 0$, 且 f 的相对极小模型 $f_0 : X_0 \to B$ 总有 $K_{f_0}^2 = 0$, 故 $f = f_0$, $K_f^2 = \chi_f = 0$. 这也推出 f 的奇异纤维都是光滑曲线的倍数. ■

推论 5.4.2 当 $kod(X) \leq 1$ 时, 必有 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$. 因而 $kod(\mathcal{F}) \leq 1$.

证明 先考虑 $Kod(X) = -\infty$ 的情形. 如果 $X = \mathbb{P}^2$, 那么 $K_{\mathcal{F}}^2 = 1$. 因而 $0 = N_{\mathcal{F}}^2 = (K_{\mathcal{F}} - K_X)^2 = 16$, 矛盾! 因此 $f : X \to B$ 是亏格零纤维化, 那么由推论 5.4.1, f 是几何直纹面且 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

类似地, 当 $kod(X) = 1$ 时, f 是拟椭圆纤维化且 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$.

最后考虑 $kod(X) = 0$ 的情形. 此时由引理 5.4.1, X 只能是阿贝尔曲面或双椭圆曲面且 $K_{\mathcal{F}}^2 = 0$. ■

我们前面已经讨论过 $kod(\mathcal{F}) \leq 1$ 时的叶状结构分类. 因此以下我们假设 $kod(X) = 2$ 及 $kod(\mathcal{F}) = 2$. 由命题 2.1.1 以及 $\mathcal{F}$ 的正则性, 可知 X 是一般型极小曲面.

命题 5.4.1 ([Bru97b], **定理** 3) 如果 $kod(\mathcal{F}) = 2$, 那么 $\mathcal{F}$ 由小平纤维化诱导.

5.5 一般型叶状结构

第六章　叶状结构的形变

定义 6.0.1　一个 (曲面) 既约叶状结构族 $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\Delta}$ 由以下要素构成:

(1) 从复光滑簇 $\mathcal{X}$ 到复圆盘的光滑态射 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$, 使得对任何 $t \in \Delta$, 纤维 X_t 是射影曲面.

(2) $\mathcal{X}$ 上的一维叶状结构, 满足
(i) $\mathcal{F}$ 相切于 π 的纤维.
(ii) $\mathcal{F}$ 的奇点集 $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ 在 $\mathcal{X}$ 中是纯余维数 2, 并且限制在每条纤维上都是有限集合.
(iii) 对每个 $t \in \Delta$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}|_{X_t}$ 是 X_t 上的叶状结构, 且 $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}_t) = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap X_t$ 由既约奇点构成.

定理 6.0.1 ([Bru01], **定理** 1)　设 $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\Delta}$ 是既约叶状结构族, 那么 $kod(\mathcal{F}_t)$ 不依赖于参数 $t \in \Delta$ 的选取.

下面的例子表明, 若条件 (ii) 不成立, 则定理 6.0.1 也可能不成立.

例 6.0.1 ([CaFl15], **例** 3.8)　考虑 $\pi' : \mathbb{P}^2 \times \Delta \to \Delta$. 在 $X'_t \cong \mathbb{P}^2$ 上引入曲线束 $\Lambda_t := \{C_{t,\lambda}\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1}$, 其中 $C_{t,\lambda}$ 由齐次方程 $F_t + \lambda G_t = 0$ 定义,

$$F_t = (1-t)LF'_0 + tF_1, \quad G_t = (1-t)LG'_0 + tG_1,$$

这里 L 定义直线, F'_0, G'_0 定义光滑三次曲线, F_1, G_1 定义光滑四次曲线, 并且满足

(1) 对 $t \in \Delta \setminus \{0\}$, F_t, G_t 定义了光滑四次曲线, 并且两者横截交.

(2) F'_0, G'_0 定义的曲线横截交九个点 $p_1, \ldots, p_9$.

(3) 对 $t \in \Delta \setminus \{0\}$, 线束 Λ_t 中的元都是不可约既约的.

Λ_t 的基点在 $\mathbb{P}^2 \times \Delta$ 上构成 16 条局部曲线 $D_1, \ldots, D_{16}$ (可以适当缩小 Δ). 不妨设 $D_1, \ldots, D_{16}$ 经过 $p_{k+1}, \ldots, p_9$, 并取曲线 $D_{17}, \ldots, D_{16+k}$ 经过 $p_1, \ldots, p_k$ 且与纤维 X'_0 横截相交.

考虑 $\mathbb{P}^2 \times \Delta$ 沿着 $B_1, \ldots, B_{16+k}$ 的爆发 $\mathcal{X} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^2 \times \Delta$, 得到诱导态射 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$. 限制在纤维 X_t 上, 得到爆发 $\sigma_t : X_t \to \mathbb{P}^2$. 它包含例外曲线 $E_{t,1}, \ldots, E_{t,16+k}$. X_t 上有由 Λ_t 诱导的纤维化 $f_t : X_t \to \mathbb{P}^1$. 当 $t = 0$ 时, f_0 实际上由 F'_0, G'_0 生成的线束诱导.

设 $\mathcal{F}_t$ 是 X_t 上由 f_t 诱导的叶状结构. 当 $t \neq 0$ 时, 对一般点 $p \in \mathbb{P}^1$,

$$f_t^* p \equiv_{\mathrm{num}} 4\sigma_t^* H - \sum_{i=1}^{16} E'_{t,i}.$$

因此

$$K_{\mathcal{F}_t} = K_{X_t/\mathbb{P}^1} = \sigma_t^* K_{\mathbb{P}^2} + \sum_{i=1}^{16+k} E'_{t,i} + f_t^*(2p) \equiv_{\mathrm{num}} \sum_{i=17}^{16+k} E'_{t,i} + \sigma_t^* H + f_t^*(p).$$

$K^2_{\mathcal{F}_t} = 9 - k$, $K_{\mathcal{F}_t}$ 是 big 的, $kod(\mathcal{F}_t) = 2$.

当 $t = 0$ 时, f_0 是椭圆纤维化, 故 $K_{\mathcal{F}_0}$ 不是 big 的. $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\Delta}$ 给出了 $\mathcal{X}$ 上的叶状 $\mathcal{F}$, 但是 $L \subseteq Sing(\mathcal{F}) \cap X_0$, 从而 $Sing(\mathcal{F}) \cap X_0 \neq Sing(\mathcal{F}_0)$. ■

引理 6.0.1 ([CaFl15], **引理 2.7**) 设 $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\Delta}$ 是既约叶状族, $t_0 \in \Delta$, 使得 $\mathcal{F}_{t_0}$ 含有 $\mathcal{F}_{t_0}$-例外曲线 $E_{t_0} \subseteq X_{t_0}$. 那么存在 t_0 的邻域 $U \subseteq \Delta$, 以及 $\pi^{-1}(U)$ 中的超曲面 E, 使得 E 横截相交于 π 的纤维, 且对任何 $t \in U$, $E_t = E \cap X_t$ 是 $\mathcal{F}_t$-例外曲线.

特别地, 给定 $s \in \Delta$, 存在 U 上的双有理态射 $\sigma : \mathcal{X}_U \to \mathcal{X}'_U$, 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X}_U, \mathcal{F}_U) & \xrightarrow{\quad\sigma\quad} & (\mathcal{X}'_U, \mathcal{F}'_U) \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi'} & \\ & U & \end{array}$$

使得 $\mathcal{F}'|_{X'_s}$ 相对极小并且 $(X'_t, \mathcal{F}'_t)_{t\in U}$ 仍是既约叶状族.

引理 6.0.2 设 $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\Delta}$ 是具有非负小平维数的既约叶状族. 那么存在 $\mathcal{X}$ 上的 $\mathbb{Q}$-有效除子 N, 使得 N 不含 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 的纤维并且 $N_t = N|_{X_t}$ 是 $K_{\mathcal{F}_t}$ 的 Zariski 分解的负定部分 $(\forall t \in \Delta)$.

特别地, 如果存在 $s \in \Delta$, 使得 $(X_s, \mathcal{F}_s)$ 是相对极小, 则存在包含 s 而开邻域 $U \subseteq \Delta$ 以及 N 的不可约分支 $E_1, \ldots, E_k$ 与 X_t 横截交于不同的有理曲线 $E_1|_{X_t}, \ldots, E_k|_{X_k}$.

(待续)

本章习题

习题 6.1 验证例 1.2.2 中的恒等式 $\omega \wedge d\omega = 0$. (提示: 考虑向量 $\alpha = (X_0, X_1, X_2)$ 及 $\beta = (A_0, A_1, A_2)$. 相当于要证 $\beta \perp \mathrm{Curl}\beta$, 故需证明 $\mathrm{Curl}\beta \times \alpha // \beta$. 为此对关系式 $\sum_{i=0}^{2} X_i A_i = 0$ 求偏导并利用欧拉恒等式.)

习题 6.2 设 $\pi : \mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{P}^2$ 是标准投影, v 是 $\mathbb{P}^2$ 上零次切向量场,

(1) 证明: 存在 $\mathbb{C}^3$ 上的线性切向量场 $w = \sum_{i=0}^{2} B_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ (这里诸 B_i 是线性齐次多项式), 使得 $\pi_* w = v$.

(2) 证明: 如果 w' 是 $\mathbb{C}^3$ 上另一线性切向量场满足 $\pi_* w' = v$, 那么 $w - w' \in \mathbb{C}\langle \sum_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \rangle$.

(3) 设 ω 是 $\mathbb{P}^2$ 上微分场. 证明: $\omega(v) = 0$ 当且仅当 $\pi^*\omega(w) = \pi^*\omega(\sum_{i=0}^{2} X_i \frac{\partial}{\partial X_i}) = 0$.

习题 6.3 证明: 射影平面上的叶状结构必能写成例 1.2.2 中形如式 (1-5) 的形式. (提示: 说明 $A_i(X_0, X_1, X_2)$ 中不含单项式 X_i^{d+1}.)

习题 6.4 验证叶状结构在 p 处的重数 $m(p)$ 以及 $tang(\mathcal{F}, C, p)$ 不依赖于坐标的选取.

习题 6.5 设曲线 C 不是 $\mathcal{F}$-不变的, $p \in C$, 证明: $tang(\mathcal{F}, C, p) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{F}$ 与 C 在 p 处横截相交.

习题 6.6 类似式 (2-2), 给出由 $\sigma^* v := \{\sigma^* v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 诱导的叶状结构切向量表示, 并由此说明其在 E 上的阶数是 $l(p) - 1$.

习题 6.7 在第 2.2 节的记号下, 证明:

(1) $l(p)=a(p)$ 当且仅当 E 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的.

(2) 设 $\tilde{p}\in E$ 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 的奇点, 则若 E 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$- 不变的, 那么

$$a(\tilde{p})\leq Z(\widetilde{\mathcal{F}},E,\tilde{p}).$$

若 E 不是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的, 那么

$$a(\tilde{p})\leq tang(\widetilde{\mathcal{F}},E,\tilde{p}).$$

(3) 若 E 是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的, 那么

$$Z(\widetilde{\mathcal{F}},E)=a(p)+1.$$

若 E 不是 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的, 那么

$$tang(\widetilde{\mathcal{F}},E)=a(p)-1.$$

(4)

$$\sum_{\tilde{p}\in E}a(\tilde{p})\leq a(p)\pm 1,$$

这里 ± 1 的符号取决于 E 是否 $\widetilde{\mathcal{F}}$-不变的 (见上一小题).

习题 6.8　验证: 既约奇点爆发后的奇点仍是既约的.

习题 6.9　解消

$$y^n\frac{\partial}{\partial x}+x^m\frac{\partial}{\partial y}\ \ (m,n\geq 2)$$

的奇点 $p=(0,0)$ 至既约奇点, 并计算其重数及阶数.

习题 6.10　确定叶状结构 $\mathcal{F}$

$$\omega=nydx-mxdy\quad (m,n\in\mathbb{Z}^+)$$

在 $p=(0,0)$ 处所有的分界线 C, 并求 $Z(\mathcal{F},C,p)$. 进一步, 通过此例来说明, 对 $\mathbb{P}^2$ 上的叶状结构 $\mathcal{F}$, 其 $\mathcal{F}$-不变曲线的次数不能被 $\mathcal{F}$ 的次数控制.

习题 6.11　在例 2.4.2 中, 取 $d(\mathcal{F})=1$. 证明:
(1) $\mathcal{F}$ 必存在奇点 (提示: 利用式 (2-1)).
(2) 设 p 是奇点, 则存在过 p 的直线 L, 它是 $\mathcal{F}$-不变的 (提示: 不妨设 $p=(0,0)$; 采用式 (1-5) 的记号, 设 $(P,Q)=(x,y)A$, 这里 A 是 2 阶系数矩阵; 考虑 A 的特征值及特征多项式).

习题 6.12　设 $p\in Sing(\mathcal{F})$, $C=\cup_{i=1}^n C_i$ 是 p 的 n 条分界线 (在 p 的小邻域内).
(1) 证明: $Var(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{i=1}^n Var(\mathcal{F},C_i,p)$.
(2) 证明: $CS(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{i=1}^n CS(\mathcal{F},C_i,p)+2\sum\limits_{i<j}(C_iC_j)_p$.
(3) 证明: $Z(\mathcal{F},C,p)=\sum\limits_{i=1}^n Z(\mathcal{F},C_i,p)-2\sum\limits_{i<j}(C_iC_j)_p$.
(4) 设 $\mathcal{F}$ 由 $xdy-ydx=0$ 生成, 在 $p=(0,0)$ 处取 n 条分界线 $C_1,\cdots,C_n$. 试求 $Z(\mathcal{F},C,p)$.

习题 6.13 设 $p \in Sing(\mathcal{F})$, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, $\sigma : (\widetilde{X}, E, \widetilde{\mathcal{F}}) \to (X, p, \mathcal{F})$ 是关于 p 的爆发, E 是例外曲线, $\widetilde{C}$ 是 C 的严格原像, $m = (\widetilde{C}, E)$.

(1) 证明: $CS(\mathcal{F}, C, p) = \sum_{\tilde{p} \in \widetilde{C} \cap E} CS(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{C}, \tilde{p}) + m^2$.

(2) 证明: $Var(\mathcal{F}, C, p) = \sum_{\tilde{p} \in \widetilde{C} \cap E} Var(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{C}, \tilde{p}) + ml(p)$.

(3) 证明: $Z(\mathcal{F}, C, p) = \sum_{\tilde{p} \in \widetilde{C} \cap E} Z(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{C}, \tilde{p}) - m^2 + ml(p)$.

(4) 设 $\mathcal{F}$ 由 $xdy - ydx = 0$ 生成, 在 $p = (0, 0)$ 处取 n 条分界线 $C_1, \cdots, C_n$. 试求 $Z(\mathcal{F}, C, p)$.

习题 6.14 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, p 是 $\mathcal{F}$ 的非多临界奇点 (Nondicritical singularity). 设 $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r : X_r \to X_0 (:= X)$ 来自 p 的一系列爆发 $\sigma_i : X_i \to X_{i-1}$ 的复合, 这里 E_i 是 σ_i 对应的例外曲线在 X_r 中的严格原像, E_1 对应的完全原像为 $\mathcal{E}_1 = \sum_{i=1}^{r} n_i E_i$.

(1) ([CSN84, Theorem 1]) 证明:

$$1 + l(p) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{p \in E_i} n_i (Z(\mathcal{F}, E_i, p) - \mu_p(\mathcal{E}_1)).$$

(提示: 利用习题 6.13.)

(2) 利用上一小题直接验证 Camacho-Neto-Sad 阶数不等式 (命题 2.9.1(1)).

习题 6.15 验证式(2-7) 和 (2-8). 在同样的假设条件与记号下, 进一步证明: $\mu_p(\mathcal{F}, B) = 0$ 当且仅当 $p \notin Sing(\mathcal{F})$.

习题 6.16 设 $\varphi : X \to C$ 是直纹面, $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构. 证明: $\mathcal{F}$ 与直纹面一致当且仅当 $K_{\mathcal{F}} F = -2$ (亦即 $N_{\mathcal{F}} F = 0$).

习题 6.17 设 $\mathcal{F}$ 是曲面 X 上的叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变的光滑有理曲线且 $C^2 = 0$. 证明:

(1) 若 $Z(\mathcal{F}, C) = 0$, 则 $\mathcal{F}$ 与直纹面一致.

(2) 若 $Z(\mathcal{F}, C) = 2$, 则 $\mathcal{F}$ 是 Riccati 叶状结构.

(3) $Z(\mathcal{F}, C) \neq 1$. (提示: 先说明 C 诱导直纹面; 对一般纤维 F, $Z(\mathcal{F}, F)$ 不可能为正数.)

习题 6.18 设 $C = C_1 + \cdots + C_r$ 是 Hirzebruch-Jung 奇点 $z^d = x^a y^b$ ($\gcd(a, d) = \gcd(b, d) = 1$) 对应的 Hirzeburch-Jung 链, $C_i^2 = -e_i \leq -2$. 令整数序列

$$0 = \gamma_0 < \cdots < \gamma_{r+1}, \qquad \mu_0 > \cdots > \mu_{r+1} = 0$$

满足 $\gamma_1 = \mu_r = 1$ 及

$$\gamma_{i-1} - e_i \gamma_i + \gamma_{i+1} = 0,$$
$$\mu_{i-1} - e_i \mu_i + \mu_{i+1} = 0.$$

(1) 证明:

$$\gamma_{k+1} = \begin{vmatrix} e_1 & -1 & & \\ -1 & e_2 & & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & e_k \end{vmatrix}, \quad \mu_{k-1} = \begin{vmatrix} e_k & -1 & & \\ -1 & e_2 & & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & e_r \end{vmatrix}$$

(2) 证明:

$$\mu_i\gamma_{i+1} - \mu_{i+1}\gamma_i = \gamma_{r+1} = \mu_0.$$

(3) 设 u, v 是正整数, D 是支集在 N 上且满足

$$D \cdot C_i = \begin{cases} 0, & i \neq 1, r, \\ -u, & i = 1, \\ -v, & i = r. \end{cases}$$

的 $\mathbb{Q}$-闭链. 证明: D 是整除子当且仅当 $va \equiv ub \pmod{d}$. (提示: "⇒" 利用 Cramer 法则求出 D 的顶端分支 C_1 的系数; "⇐" 令 $n_i = \frac{u\mu_i + \gamma_i v}{d}$, 证明 $D = \sum_{i=1}^{r} n_i C_i$.)

(4) 设 $d = \mu_0 = \gamma_{r+1}$,

$$\tilde{\mu}_i = \frac{\mu_i}{\gcd(d, \mu_i)}, \quad \tilde{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\gcd(d, \gamma_i)}, \quad \tilde{d}_i = \frac{d}{\gcd(d, \mu_i)\gcd(d, \mu_{i+1})},$$

并设

$$M_k = \frac{1}{d}\left(\tilde{\mu}_k \sum_{i=1}^{k} \gamma_i C_i + \tilde{\gamma}_k \sum_{i=k+1}^{r} \mu_i C_i\right).$$

证明:

$$M_k C_i = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \frac{-1}{\gcd(d, \mu_i)}, & i = k. \end{cases} \tag{6-1}$$

特别地, $M_1, \ldots, M_r$ 构成 $\mathbb{Q}\langle C_1, \ldots, C_r\rangle \subseteq NS(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的一组基.

习题 6.19 设 $\mathcal{F}$ 满足定理 4.4.1 的条件, $C = C_1 + \cdots + C_r$ 是极大 $\mathcal{F}$- 链, $e_i = -C_i^2$. 数列 $\{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{r+1}\}$ 满足习题 6.18 的条件. 设 N 是 $K_{\mathcal{F}}$ 的负定部分, 证明: C_i 在 N 中的系数是 $\frac{\mu_i}{\mu_0}$, 并求 N^2.

习题 6.20 设 $N = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{r} \mu_i C_i$ 是 Hrzebruch 链, 这里不可约分支 C_i 及系数 μ_i 满足习题 6.18 的条件, $d = \mu_0$. 设 U 是 N 的管状邻域, $\pi_0 : V_0 \to U$ 是以 N 为分歧轨迹的 d 次循环覆盖, 使得在 C_i 的一般点附近可写为 $z^d = x^{\mu_i}$. $\tau : V_1 \to V_0$ 解消 V_0 上所有 Hirzebruch 奇点, $\pi = \pi_0\tau$.
(1) 证明: 存在 π^*N 中唯一的不可约分支 Γ_i, 使得 $\pi : \Gamma_i :\to C_i$ 是有限覆盖. 进一步, 这个覆盖的次数是 $\gcd(d, \mu_i)$, 并且 Γ_i 在 π^*C_i 中的系数是 $\frac{d}{\gcd(d, \mu_i)}$.
(2) 证明: Γ_i 在 π^*M_k 中的系数是

$$a_i = \begin{cases} \tilde{\mu}_k\tilde{\gamma}_i, \text{ if } i \leq k, \\ \tilde{\gamma}_k\tilde{\mu}_i, \text{ if } i > k. \end{cases}$$

(3) 证明: π^*M_k 是整除子 (定义见习题 6.18), 并且满足

$$\pi^*M_k \cdot \Gamma_i = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ -1, & i = k, \end{cases}$$

以及 $\pi^*M_i \cdot \pi^*M_j = -\tilde{\mu}_j\tilde{\gamma}_i$ $(j \geq i)$. (提示: 设 $\pi^*M_k = \sum_{i=1}^{r} a_i\Gamma_i + D$, 这里 D 是支集在例外集上的 $\mathbb{Q}$-链. 利用习题 6.18 (3) 即可证明 D 是整除子.)
(4) 设 $q_i = C_i \cap C_{i+1}$, $G \subseteq NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ 是由 π^*N 的所有分支生成的子空间. 证明: 所有 π^*p_i

中的各例外分支以及所有 π^*M_k 构成了 G 的基.

(5) 设 $T_1,\dots,T_\ell$ 是所有来自 $\pi^*q_1,\dots,\pi^*q_{r-1}$ 的例外集中的不可约分支, 并设 $P=(a_{ij})_{1\le i,j\le r}$,

$$W=\begin{pmatrix} P & * \\ O & I_\ell \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \pi^*M_1 \\ \vdots \\ \pi^*M_r \\ C_1 \\ \vdots \\ C_\ell \end{pmatrix} = W\cdot \begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}_1 \\ \vdots \\ \widehat{\Gamma}_r \\ C_1 \\ \vdots \\ C_\ell \end{pmatrix}$$

这里 $a_{ij}=a_{ji}=\tilde{\mu}_j\tilde{\gamma}_i$ $(j\ge i)$. 设 A (相应地, B) 是 $(\pi^*M_1,\dots,\pi^*M_r,T_1,\dots,T_\ell)$ (相应地, $(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_r,T_1,\cdots,T_\ell)$) 的相交矩阵. 证明: $|W|=|P|$, $|A|=\tilde{d}_1\dots\tilde{d}_{r-1}\cdot|P|$ 以及 $|P|=\tilde{d}_1\dots\tilde{d}_{r-1}$. 因而 $|B|=1$.

(6) 证明: $|B|=1$ 等价于 π^*N 是第一类有理曲线, 即它可以被收缩到光滑点.

习题 6.21 设 $E=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e)$ $(e\ge 0)$, $\varphi: X:=\mathbb{P}(E)\to\mathbb{P}^1$ 是对应的 e 次 Hirzebruch 曲面, 带有截面 C_∞ 和 C_0, 使得 $C_\infty^2=-e$, $C_0^2=e$, F 是 φ 的一般纤维. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的叶状结构, 由 $\omega\in H^0(\Omega_X(aC_\infty+bF))$ 给出.

(1) 证明: ω 能写成如下形式:

$$\left(\sum_{i=0}^{a}g_i(t)u^i\right)dt-\left(\sum_{i=0}^{a-2}h_i(t)u^i\right)du+t^{b-e-1}f\left(\frac{u}{t^e}\right)(eudt-tdu),$$

这里

$$\deg g_i(t)\le b-2-ei,\quad \deg h_i(t)\le b-1-e-ei,\quad \deg f(x)\le\min\{a-2,[\frac{b-e-1}{e}]\},$$

(t,u) 是 $X\setminus\{C_\infty,F\}$ 的坐标, 使得 C_0 (相应地, F)被定义为 $u=0$ (相应地, $t=\infty$). 在其余坐标卡上的变换关系为 $t=\frac{1}{s}$, $u=\frac{v}{s^e}$. (提示: 利用习题 **??**).

(2) 设 $N_{\mathcal{F}}=aC_\infty+bF$. 证明: $b\ge e(a-1)+1$.

(3) 设 $K_{\mathcal{F}}=xC_\infty+yF$. 证明:

$$m(\mathcal{F})=(x+1)(2y+2-xe)+2.$$

进一步, 给出 $K_{\mathcal{F}}$ 的 Zariski 分解.

(4) 证明: $\mathcal{F}$ 是 Riccati 叶状结构当且仅当 ω 可被写为

$$\left(g_0(t)+g_1(t)u+g_2(t)u^2\right)dt-h(t)du+ct^{r+1}(eudt-tdu),$$

这里 c 是常数,

$$\deg g_0(t)\le r+e,\quad \deg g_1(t)\le r,\quad \deg g_2(t)\le r-e,\quad \deg h(t)\le r+1,$$

$N_{\mathcal{F}}=2C_\infty+(r+2+e)$, $K_{\mathcal{F}}=rF$ $(r\ge 0)$. 特别地, C_∞ (相应地, 由 $t=\infty$ 定义的纤维 F_∞) 是 $\mathcal{F}$- 不变当且仅当 $g_2(t)\equiv 0$ (相应地, $c=0$).

(5) 考虑 Riccati 叶状结构

$$\omega=(t+(et^{r+1}-a)u+u^2)dt-(t^{r+2}-t)du,\quad r\ge\max\{1,e\},\quad a\in\mathbb{C}.$$

求出所有奇点并指明其类型.

习题 6.22 (*) 设 $f : S \to \mathbb{P}^1$ 是仅含两条奇异纤维的纤维化, 并且没有重纤维. 证明: f 诱导的叶状结构是 Riccati 叶状结构.

习题 6.23 设 $\mathcal{F}$ 是既约叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线, 证明:
(1) $K_{\mathcal{F}}|_C \cong \omega_C \otimes \mathcal{O}_C(D)$, 这里 $D = \sum_{p\in C} Z(\mathcal{F}, C, p)p$. (提示: 设 v 是 $\mathcal{F}$ 的对应切场, $p \in C$, U 是 p 的邻域. 当 $v(p) \neq 0$ 时, $v|_C$ 也是 C 的切场, 因而局部上 $T_{\mathcal{F}}|_{C\cap U} \cong T_C|_U$; 当 $v(p) = 0$ 时, $T_{\mathcal{F}}|_{C\cap U} \cong T_C|_U \otimes \mathcal{O}_U(-Z(\mathcal{F}, C, p)p)$.)
(2) $h^0(C, mK_{\mathcal{F}}|_C) \leq h^0(C, mK_C) + mZ(\mathcal{F}, C)$. (提示: 结合 (1) 得限制正合列

$$0 \longrightarrow \omega_C^{\otimes m} \longrightarrow \mathcal{O}_C(K_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{mD} \longrightarrow 0).)$$

习题 6.24 设 $\mathcal{F}$ 是一般型平面叶状结构, C 是 $\mathcal{F}$-不变曲线. $\sigma : (X, \mathcal{G}) \to (\mathbb{P}^2, \mathcal{F})$ 是安全解消 (Safe resolution), 即在解消为既约模型之后再对每个奇点做一次爆发.
(1) 证明: 存在只依赖于 $\deg \mathcal{F}$ 的正整数 k, 使得 k 次爆发后能得到只带半既约 (Quasi-reduced) 奇点的叶状结构 (半既约奇点是指重数为 1 的奇点或者鞍-结点).
(2) 设 $\overline{C}$ 是 C 的严格原像, 证明: 存在 $Z(\mathcal{G}, \overline{C})$ 的上界, 该上界只依赖于 $\deg \mathcal{F}$. (提示: 由 (1), 将情形归结为只带半既约奇点的叶状.)
(3) 证明: 存在 n_0, 使得 $P_{hn_0}(\mathcal{F}) \geq h^0(C, \mathcal{O}_C(hn_0K_{\mathcal{F}}))$, 这里 $h = h(\mathcal{F})$. (提示: 利用 (2) 和习题 6.23.)
(4) 证明定理 4.5.2.

习题 6.25 假设 $h^0(X, K_{\mathcal{F}}) = 0$ 且 $h^0(X, N_{\mathcal{F}}) > 0$,
(1) 证明: 若 $q(X) > 0$, 则 $\mathcal{F}$ 是由 Albanese 纤维化 $\alpha : X \to B$ 诱导, $g(B) = q(X) = 1$ 且 α 是局部平凡的. (提示: 利用推论 1.3.1 说明 $\mathcal{F}$ 由 α 给出, 再证明 $N_{\mathcal{F}} \equiv 0$, 即 $K_{\mathcal{F}} \equiv K_X$. α 的局部平凡性可参见 [BPV04, III, 定理 15.4] 或 [Xia92, 命题 6.3.2]).
(2) 假设 $q(X) = 0$, $N_{\mathcal{F}} \equiv \sum_{i=1} n_iD_i$, 这里 $n_i > 0$, D_i 是不可约分支. 证明: $p_g(X) = 0$ 并且诸 $D_i \cong \mathbb{P}^1$. (提示: 先说明 $h^0(X, K_X + D_i) = 0$, 其次利用正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0$$

证明 $h^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) = 0$.)
(3) 证明: 如果 $\mathcal{F}$ 是正则叶状结构并且 $K_{\mathcal{F}}$ 是伪有效的, 那么 $(X, \mathcal{F})$ 必满足 (1). (提示: 若为 (2) 的情形, 利用 Baum-Bott 公式证明诸 D_i 彼此不相交. 再利用 [BPV04, 命题 4.3] 说明 D_i 落在某个直纹面映射里, 由此推出该映射诱导 $\mathcal{F}$.)

参 考 文 献

[BaBo70] P. Baum, R. Bott: *On the zeroes of meromorphic vector fields*, Essais en l'honneur de De Rham (1970),29–74.

[BPV04] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven: Compact Complex Surfaces, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Bru97] M. Brunella: *Some remarks on indices of holomorphic vector fields*, Publicacions matematiques, **41**(2) (1997), 527–544.

[Bru97b] M. Brunella: *Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, Vol.**30**, no. 5, (1997), 569–594.

[Bru01] M. Brunella: *Invariance par déformations de la dimension de Kodaira d'un feuilletage sur une surface*, in: Essays on geometry and related topics. Vols 1 and 2. Monoger. Enseign. Math. **38**. Enseignement Mathémathique, Geneva (2001), 113–132.

[Bru15] M. Brunella: *Birational Geometry of Foliations (IMPA Monographs)*, (Springer, 2015).

[Cam88] C. Camacho: *Quadratic forms and holomorphic foliations on singular surfaces*, Math. Ann., **282** (1988), 177–184.

[CaSa82] C. Camacho, P. Sad: *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. Math., **115** (1982), 579–595.

[CSN84] C. Camacho, P. Sad, A. Lins Neto: *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, J. Diff. Geom., **20** (1984), 143–174.

[CarM94] Manuel M. Carnicer: *The Poincaréproblem in the nondicritical case*, Annals of mathematics. **140**(2) (1994), 289–294.

[CaFl15] P. Cascini, E. Floris: *On invariance of plurigenera for foliations on surfaces*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), (2015).

[CaFl15b] P. Cascini, E. Floris: *Notes on MMp for foliations*, preprint.

[CeNe91] D. Cerveau, A. Lins Neto: *Holomorphic foliations in* $\mathbb{CP}(2)$ *having an invariant algebraic curve*, Annales de l'institut Fourier, **41**(4) (1991), 883–903.

[Dar78] G. Darboux: *Mémoire sur les équations differentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, Vol. 2, Issue: 1 (1878), 151–200.

[GMOB89] X. Gomez-Mont, L. Oriz-Bobadilla: *Sisstemas dinámicos holomorfos en superficies*, Aport. Matem., Soc. Mat. Mexicana (1989).

[GrHa94] P. Griffith, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, (Wiley-Interscience, 1994).

[Jou78] J.-P. Jouanolou: *Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff*, Math. Ann., **232** (1978), 239–245.

[MaRa82] J. Martinet, J.-P. Ramis: *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math. IHES **55**, (1982), 63–124.

[McQ00] M. McQuillan: *Noncommutative Mori theory*, preprint IHES M/00/15 (2000).

[McQ08] M. McQuillan: *Canonical models of foliations*, Pure and applied mathematics quarterly, **4**(3) (2008).

[Mil68] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, vol. **61**, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1968)

[Miy87] Y. Miyaoka: *Deformation of a morphism along a foliation and applications*, Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987) , 245–268,

[MiPe97] Y. Miyaoka, T. Peternell: *Geometry of higher dimensional algeraic varieties*, Birkhäuser Basel, 1997.

[Mov15] H. Movasati: *Introduction to algebraic curves and foliations*, preprint, 2015.

[MoVi09] H. Movasati, E. Vieira: *Projective limit cycles*, Moscow Mathematical Journal, (4) **9** (2009), 855-866.

[Net02] A. Lins Neto: *Some examples for the Poincaréand Painlevéproblems*, Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, **35**, no. 2 (2002).

[NeSc11] A. Lins Neto, B. Scárdua: *Introdu?aoa teoria das folhea?oes algébricas complexas*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (2011).

[Per02] J. V. Pereira: *On the Poincaré problem for foliations of general type,* Math. Ann., **323**(2) (2002), 217–226.

[Per05] J. V. Pereira: *On the height of foliated surfaces with vanishing Kodaira dimension,* Publicacions Matemàtiques, (2005), 363–373.

[Sei68] A. Seidenberg: *Reduction of singularities of the differential equation* $Ady = Bdx$, Amer. J. Math., **89**(1968), 248–269.

[Suw98] T. Suwa: *Indices of vector fields and residues of holomorphic singular foliations*, Hermann (1998).

[Tan94] S.-L. Tan: On the base changes of penciles of curves, I, Manuscripta Math., **84**(1994), 225–244.

[Tan96] S.-L. Tan: *On the base changes of penciles of curves, II,* Math. Z., **222**(1996), 655–676.

[Xia92] G. Xiao: *The fibrations of algbraic* , Shanghai Scientific & Technical Publishers (in Chinese), (1992)

索 引

$\mathcal{F}$-链, 27
p-封闭, 38
Hirzebruch-Jung 链, 27

Albanese 纤维化, 8

Baum-Bott 指标, 23
Baum-Bott 公式, 24

Camacho-Neto-Sad 阶数不等式, 28
Camacho-Sad 指标, 22
Carnicer 不等式, 28
Castelnuovo-de Franchis 定理, 32

Darboux 定理, 10
Darboux 定理, 31
Dulac 形式, 14

Frobenius 态射, 38

Gomez-Mont-Seade-Verjovsky 指标, 18

Kronecker 叶状结构, 5

Miyaoka 有理性判则, 38

Poincaré 区域, 14

Riccati 叶状结构, 4
Riccati 叶状结构, 19, 36

Siegel 区域, 14

Van den Essen 重数公式, 12

变分指标, 21

代数可积, 31
代数重数, 10

典范模型定理, 44

对数 1-形式, 33
对数叶状结构, 33
多临界点, 6
多重亏格, 44

放射型多临界点, 17
非常特殊叶状结构, 5, 36
分界线, 6
分界线定理, 25

高度, 45

横截面, 29

极小叶状结构, 35
极小正规交模型, 36
既约奇点, 13
既约叶状结构, 35
既约叶状族, 52
简单奇点, 13

刘维尔型, 24

拟刘维尔型, 24
拟椭圆纤维丛, 46

欧拉示性数, 17
欧拉拓扑示性数, 18
庞加莱第一回归映射, 29
庞加莱公式, 30
庞加莱问题, 28

强分界线, 14

全纯向量场, 46
绕异性映射, 29
弱分界线, 14

首次积分域, 38
数值小平维数, 44

特征值, 13

湍流叶状结构, 4
椭圆 Gorenstein 叶, 44

希尔伯特模叶状, 45
相对极小叶状结构, 35
相切除子, 2

相切指标, 17

小平维数, 44
悬置, 47

叶状, 1
叶状不变, 6
叶状次数, 3
叶状典范丛, 1
叶状法丛, 1
叶状例外曲线, 35
叶状奇点集, 1
叶状切丛, 1
叶状余法丛, 1
叶状余切丛, 1
叶状重数, 10

有理首次积分, 31

正则点, 1
正则叶状结构, 51