华东师范大学期末试卷 (B): 2025—2026 学年第 2 学期

课程名称: 高 等 代 数 II　　教师姓名: 陆俊

学生姓名:　　学　　号:

专　　业:　　年级/班级: 2025 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{R}$ 表实数域, $\mathbb{C}$ 表复数域, $M_{m\times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ 表对角阵, $J_n(\lambda_0)$ 表示属于特征值 λ_0 的 n 阶若当块, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹, $m_A(\lambda)$ 和 $\chi_A(\lambda)$ 分别表 A 的极小多项式和特征多项式, A^T 表示 A 的转置, V 表示 K 上线性空间, V^* 表示 V 的对偶空间. $C(A,B)$ 表矩阵方程 $AX=XB$ 的解空间.

一、 判断题 (不需要给理由) (共 15 分, 每小题 3分)

(1) 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k$ 存在, 则 A 的特征值模长必小于 1. (　　)

(2) 对非零复数 a, $J_n(a)J_n(\bar{a})^T$ 的特征值必是正实数. ..... (　　)

(3) 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 仅有特征值 0, 则 e^A 仅有特征值 1. ..... (　　)

(4) 秩 1 的 n 阶方阵彼此相似. ..... (　　)

(5) $\mathrm{diag}(1,\lambda-1,\lambda+1,\lambda^2-1)$ 是史密斯正规形. ..... (　　)

二、 单项选择题 (共 15 分, 每小题 3分)

(1) 满足 $(X-I_2)^2X=0$ 且 $X\neq 0, I_3$ 的 3 阶若当典范矩阵 X 共有 (　　) 种可能(不考虑若当块排列顺序).
(A) 2;　(B) 3;　(C) 4;　(D) 以上答案都不对.

(2) 以下矩阵方程的解空间维数等于 (　　),

$$\begin{pmatrix} J_2(0) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix} X = XJ_4(0).$$

(A) 2;　(B) 3;　(C) 4;　(D) 以上答案都不对.

(3) 已知线性映射 $\varphi : V \to V$ 的表示矩阵的初等因子组是 λ^2, λ^2, 那么 φ-循环子空间共有 (　　)个.
(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 以上答案都不对.

(4) $I_3 - \cos J_3(0)$ 的秩等于 (　　).
(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 以上答案都不对.

(5) 已知 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 初等因子组 $\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda-1), (\lambda-1)^2$, 那么不变因子个数是 (　　).
(A) 3;　(B) 5;　(C) 7;　(D) 以上答案都不对.

三、 填空题 (不需要写过程) (共 15 分, 每小题 3分)

(1) 已知复方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的不变因子组为

$$1, 1, 1, 1, \lambda - 1, (\lambda-1)(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2.$$

A 的行列式因子组是_____.

(2) 矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

的极小多项式是_____.

(3) $I_3 + J_3(0)^2$ 的若当典范形为_____.

(4) $\sin J_4(0)$ 等于_____(要求写出具体矩阵).

(5) 以下矩阵方程的全部解为_____(要求写出具体矩阵),

$$\begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_2(0) \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_2(1) \end{pmatrix}.$$

四、 计算题 (共 15 分) 考虑实对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 T 以及对角阵 D, 使得 $D := T^{-1}AT$.

五、 **计算题** (共 15 分) 设 $A = J_3(0)^2$.

(1) 试求 A 的若当典范形 J;

(2) 求一个可逆矩阵 $P \in M_3(\mathbb{C})$, 使得 $P^{-1}AP = J$.

六、 **证明题** (共 15 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}$. 设 $n(A, a)$ 是 χ_A 的根 a 的重数. 证明: 对任何正整数 k, 我们有

$$n - n(A, a) \leq \mathrm{rk}(A - aI_n)^k,$$

并且当 $k \geq n(A, a)$ 时, 上面不等式的等号成立.

七、 **证明题** (共 10 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是半负定对称矩阵, k 是 $\chi_A(\lambda)$ 中 λ 因子的重数. 设

$$W = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X^T AX = 0\}$$

证明: W 是 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维线性子空间.