华东师范大学期末试卷 (A): 2025—2026 学年第 2 学期

课程名称: 高 等 代 数 II　　教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2025 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{R}$ 表实数域, $\mathbb{C}$ 表复数域, $M_{m\times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ 表对角阵, $J_n(\lambda_0)$ 表示属于特征值 λ_0 的 n 阶若当块, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹, $m_A(\lambda)$ 和 $\chi_A(\lambda)$ 分别表 A 的极小多项式和特征多项式, A^T 表示 A 的转置, V 表示 K 上线性空间, V^* 表示 V 的对偶空间. $C(A,B)$ 表示矩阵方程 $AX=XB$ 的解空间.

一、 判断题 (不需要给理由) (共 15 分, 每小题 3分)

(1) 复方阵 A 和 A^T 必定相似.....(　　)

(2) 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 则 $A+A^T$ 的特征值必是实数. .....(　　)

(3) 设 $A=J_n(\sqrt{-1})$, 则 AA^T 是埃尔米特矩阵. .....(　　)

(4) 若方阵 A 仅有特征值 0, 则 A 必为幂零阵. .....(　　)

(5) n 阶 λ-方阵的所有初等因子次数总和等于 n. .....(　　)

二、 单项选择题 (共 15 分, 每小题 3分)

(1) 满足 $X^2+7X+12I_3=0$ 的 3 阶若当典范矩阵 X 共有 (　　) 种可能(不考虑若当块排列顺序).
(A) 2;　(B) 3;　(C) 4;　(D) 以上答案都不对.

(2) 以下矩阵方程的解空间维数等于 (　　),

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & J_2(0) \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 0 & \\ & J_2(1) \end{pmatrix}.$$

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4.

(3) 线性映射 $\varphi: V \to V$ 属于特征值 1 的根子空间维数为 (　　),这里

$$\varphi(x, y, z) = (x + y, y, 2x - y - z).$$

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3.

(4) $\sin J_3(0)$ 的秩等于 (　　).
(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3.

(5) 以下矩阵中共有 (　　) 个是酉矩阵 ($i := \sqrt{-1}$)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3.

三、 **填空题 (不需要写过程)** (共 15 分, 每小题 3分) 已知复方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的初等因子组为 $\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda - 1), (\lambda - 1)^2$.

(1) 阶数 n 等于_____.

(2) A 的史密斯正规形为_____.

(3) A 的行列式因子组为_____.

(4) A 的极小多项式为_____.

(5) 假设 J 是 A 的若当典范形, 则 $\cos(\pi J)$ 等于_____.

四、 **计算题** (共 15 分) 考虑实对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 T 以及对角阵 D, 使得 $D := T^{-1}AT$.

五、 **计算题** (共 15 分) 设 $A = I_3 - J_3(0) + J_3(0)^2$.

(1) 试求 A 的若当典范形 J;

(2) 求一个可逆矩阵 $P \in M_3(\mathbb{C})$, 使得 $P^{-1}AP = J$.

六、 **证明题** (共 15 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}$. 证明: $A \sim J_n(a)$ 当且仅当

$$\mathrm{rk}(A - aI_n)^{n-1} > \mathrm{rk}(A - aI)^n.$$

七、 **证明题** (共 10 分) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵. 证明: e^A 和 $e^A + e^B$ 是正定实对称矩阵.