华东师范大学期中试卷: 2025—2026 学年第 2 学期

课程名称: 高 等 代 数 II　　教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2025 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{R}$ 表实数域, $\mathbb{C}$ 表复数域, $M_{m\times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹,$m_A(\lambda)$ 和 $\chi_A(\lambda)$ 分别表 A 的极小多项式和特征多项式, A^T 表示 A 的转置, V 表示 K 上线性空间, V^* 表示 V 的对偶空间.

一、 判断题 (不需要给理由) (共 15 分, 每小题 3分)

(1) 设 $\varphi: K^2 \to K^2$ 是线性变换, 那么 $K^2 = \mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$. ..... (　　)

(2) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是正定对称矩阵, 那么 A^{-1} 也是正定的. ..... (　　)

(3) 设 W_1 和 W_2 是标准欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 满足 $W_1 \subseteq W_2$, 那么 $W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$. ..... (　　)

(4) 设 $\varphi \in V^*$, 那么 $q(\alpha) = \varphi(\alpha)^2$ 是 V 上二次型. ..... (　　)

(5) 若 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 中无重根, 那么 A 在 $\mathbb{C}$ 中必可对角化. ..... (　　)

二、 单项选择题 (共 20 分, 每小题 4分)

(1) 实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

的正惯性指数和符号差分别为 (　　).
(A) 1 和 -1 ; (B) 3 和 2; (C) 2 和 0; (D) 2 和 1.

(2) 设 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是列向量空间 $V = K^n$ 的一组基,

$$P = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in M_n(K).$$

恒同映射 $\mathrm{Id} : V \to V$ 的定义域空间取标准基, 值域空间取基 $\eta_1, \ldots, \eta_n$, 那么 Id 在这两组基下的表示阵为 (　　).
(A) I_n;　　(B) P;　　(C) P^{-1};　　(D) P^2.

(3) 考虑标准欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中的向量

$$\alpha = (0, 1, 1, 1), \quad \beta = (1, 1, 1, 1),$$

θ 是两者夹角, t 是使得 $|\alpha - t\beta|$ 达到最小的实数, 那么 θ 和 t 分别是 (　　).
(A) $\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{3}{4}$;　　(B) $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{3}{2}$;　　(C) $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$;　　(D) 以上答案都不对.

(4) 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -18 & 7 & 6 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

的极小多项式 $m_A(\lambda)$ 和 $\chi_A(\lambda)$ 满足 (　　).
(A) $m_A(\lambda) = \chi_A(\lambda)$;　　(B) $m_A(\lambda)^2 = (\lambda - 1)\chi_A$;
(C) $(\lambda - 1)m_A(\lambda) = \chi_A(\lambda)$;　　(D) $(\lambda + 1)m_A(\lambda) = \chi_A(\lambda)$.

(5) 考虑线性映射

$$\varphi : K^4 \to K^4, \quad (x, y, z, w) \to (-y, -z, -w, 0),$$

那么非平凡不变子空间 W (即 $W \neq 0, V$)的个数为 (　　).
(A) 1;　　(B) 2;　　(C) 3;　　(D) 无限个.

三、 填空题 (不需要写过程) (共 20 分, 每小题 4分)

(1) 设 $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$, $W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$, 这里

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 2, -1, -2), \quad \alpha_2 = (0, 1, -1, 0), \\ \beta_1 &= (-2, 3, 1, -2), \quad \beta_2 = (0, -5, 2, 3), \end{aligned}$$

那么 $W_1 \cap W_2$ 的一组基为_____. (**要求写成向量形式**)

(2) 在上一小题中, β_2 在 W_1 中的正交投影 $P_{W_1}(\beta_2)$ 等于_____.(**要求写成向量形式**)

(3) 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ -5 & -9 & -5\\ 5 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

可对角化, 那么使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵的正交矩阵 T 等于_____.

(4) 考虑线性映射

$$\varphi: K^3 \to K^1, \quad (x,y,z) \to x+y+z$$

那么双线性函数 $f(\alpha,\beta) := \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ 的度量阵为_____.

(5) 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 4\\ 4 & -6 & 5\end{pmatrix}$$

有唯一特征值, 那么特征子空间的基为_____.

四、 **计算题** (共 15 分) 考虑实二次型

$$q(x,y,z)=\lambda x^2+3y^2+27z^2+2xy+10yz+10xz.$$

(1) 当$\lambda=1$ 时, 求非奇异线性变换, 使得 $q(x,y,z)$ 化为标准型;

(2) 求 λ 的取值范围, 使得 $q(x,y,z)$ 是正定的.

五、 **计算题** (共 10 分) 考虑 $V=K^4$ 的子空间 $W=L(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, 这里

$$\eta_1=(0,1,0,1), \quad \eta_2=(1,0,2,2), \quad \eta_3=(1,1,1,1).$$

试用施密特正交化方法求 W 的一组标准正交基.

六、 **证明题** (共 10 分) 设 $A\in M_n(K)$ 满足 $A^2=a^2I_n$ $(a\in K\setminus\{0\})$. 设

$$W_1=\{X\in K^n \mid (A-aI_n)X=0\}, \quad W_2=\{X\in K^n \mid (A+aI_n)X=0\}.$$

证明: $K^n=W_1\oplus W_2$.

七、 **证明题** (共 10 分) 设 W_1,W_2 是欧氏空间 V 的子空间, 证明:

$$(W_1+W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}.$$

八、 **可选附加题** (共 10 分) 考虑 n 阶实对称矩阵 $H_n = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, 这里

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

证明: H_n 是正定矩阵.
(注记: 该矩阵称为希尔伯特矩阵)