华东师范大学期末试卷 (B): 2025—2026 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数 I　　教师姓名: 陆俊

学生姓名:　　学　　号:

专　　业:　　年级/班级: 2025 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m\times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹, A^T 表示 A 的转置, V, V' 表示 K 上线性空间.

一、 判断题 (不需要给理由) (共 15 分, 每小题 3分)

(1) 若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in K^n$ 线性无关, 则 $\alpha_1-\alpha_r, \alpha_2-\alpha_r \ldots, \alpha_{r-1}-\alpha_r$ 也线性无关.....( )

(2) 以下映射

$$\varphi : M_n(K) \to K^1, \quad A \mapsto |A|$$

是线性映射.....( )

(3) 若线性方程组无解, 则增广矩阵列满秩. .....( )

(4) 若线性映射 $\varphi : K^n \to K^n$ 是满射, 那么 φ 是同构. .....( )

(5) 所有 2 阶不可逆方阵构成的集合是 $M_2(K)$ 的线性子空间. ..( )

二、 单项选择题 (共 25 分, 每小题 5分)

(1) 设 $A, B \in M_2(K)$, 若 $AB=0$, 则 $r(A)+r(B)$ 不可能等于 ( ).
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

(2) 设置换 $\sigma = (12)(67)(345)$ 和 $\tau = (1234)(567) \in S_7$, 则 $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\tau\sigma)$ 和 $\mathrm{sgn}(\sigma\tau)$ 分别等于 ( ).
(A) 1 和 1; (B) -1 和 -1; (C) -1 和 1; (D) 1 和 -1.

(3) 考虑 K^3 中向量组

$$\alpha_1=(1,-1,1)^T, \quad \alpha_2=(0,2,1)^T, \quad \alpha_3=(1,1,2)^T, \quad \alpha_4=(0,4,2)^T.$$

以下哪一组是该向量组的极大线性无关组 ( ).
(A) α_1,α_2; (B) α_2,α_4; (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; (D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$.

(4) 设诸 α_i 同上一小题, 线性方程组 $\sum_{i=1}^{3} x_i\alpha_i = \alpha_4$ (　　).

(A) 无解; (B) 有唯一解; (C) 有限个解; (D) 无限个解.

(5) 线性映射

$$\varphi : K^3 \to K^3, \quad (a, b, c) \mapsto (a - b, b - c, c - a)$$

的核空间 $\mathrm{Ker}\varphi$ 与像空间 $\mathrm{Im}\varphi$ 的维数分别等于 (　　).
(A) 1 和 1; (B) 2 和 1; (C) 1 和 2; (D) 2 和 2.

三、 填空题 (不需要写过程) (共 25 分, 每小题 5分)

(1) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

的值等于_____.

(2) 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵 A^* 等于_____,

(3) 设 A 同上一小题, $B = I_3 + A$, 那么满足 $BX = 8A$ 的三阶方阵 X 等于_____.

(4) 设 $A \in M_n(K)$ 是可逆矩阵,

$$B = \begin{pmatrix} I_n & A^2 \\ A_n^{-1} & A + I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(K),$$

那么 B^{-1} 等于_____.

(5) 已知 $1, x, x^2, x^3$ 是 K 上的线性空间

$$K[x]_3 := \{f(x) \in K[x] \mid \deg f(x) \leq 3\}$$

的一组基, 那么线性映射

$$\varphi : K[x]_3 \to K[x]_3, \quad \varphi(f(x)) = xf'(x)$$

在这组基下的表示矩阵等于_____.

四、 **计算题** (共 15 分) 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 4 \\ x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 & = 5 \end{cases}$$

(1) 取 $\lambda = 8$, 试用克莱默法则求方程组的解 (要求写简要过程).

(2) 问: λ 取何值时, 方程组有无穷多解? 并求此时的所有解 (要求写成列向量形式).

五、 **证明题** (共 10 分) 已知 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 是线性空间 $M_2(K)$ 的一组基 (E_{ij} 定义见试卷开头说明).

(1) 证明: 以下映射是线性映射:

$$\varphi : M_2(K) \to M_2(K), \quad \varphi(A) = AE_{11} - E_{22}A.$$

(2) 证明: $\mathrm{Ker}\varphi = L(E_{12}, E_{21})$ 且 $\mathrm{Im}\varphi = L(E_{11}, E_{22})$.

六、 **证明题** (共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$. 证明: 存在非常值多项式 $f(x) \in K[x]$, 使得 $f(A) = I_n$.