# 华东师范大学期末试卷 (A): 2025—2026 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数 I　　教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2025 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 | 阅卷人签名 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

以下如无特别声明, $K$ 均表数域, $M_{m\times n}(K)$ 表示 $m$ 行 $n$ 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 $n$ 阶方阵全体, $I_n$ 表示 $n$ 阶单位矩阵, $E_{ij}$ 是第 $i$ 行第 $j$ 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 $A$ 的秩和迹, $A^T$ 表示 $A$ 的转置, $V, V'$ 表示 $K$ 上线性空间.

## 一、 判断题 (不需要给理由) (共 15 分, 每小题 3分)

(1) 设 $\alpha, \beta, \gamma \in K^n$ 是线性无关的向量组, 那么 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ 和 $\gamma+\alpha$ 也线性无关. ..... (　　)

(2) 以下映射
$$\varphi : K^2 \to K^1, \quad (a, b) \mapsto a - b$$
不是线性映射 ..... (　　)

(3) 若线性方程组无解, 则它的导出方程组只有平凡解. ..... (　　)

(4) 设 $U, V$ 都是 $K^n$ 的线性子空间, 如果 $\dim_K U \le \dim_K V$, 那么必有 $U \subseteq V$. ..... (　　)

(5) 对 $K^n$ 的任何线性子空间 $U$, 补集 $U^c := K^n \setminus U$ 都不可能是 $K^n$ 的线性子空间. ..... (　　)

## 二、 单项选择题 (共 25 分, 每小题 5分)

(1) 设 $A, B \in M_2(K)$, 若 $r(AB) = 1$ 且 $r(A) \le r(B)$, 则 $r(A)$ 等于 (　　).
(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 答案不唯一.

(2) 设置换 $\sigma = (126)(345)$ 和 $\tau = (1234)(56) \in S_6$, 则 $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ 和 $\mathrm{sgn}(\sigma\tau)$ 分别等于 (　　).
(A) 1 和 1;　　(B) $-1$ 和 $-1$;　　(C) $-1$ 和 1;　　(D) 1 和 $-1$.

(3) 考虑 $K^3$ 中向量组

$$\alpha_1=(1,-1,1)^T,\quad \alpha_2=(2,1,-2)^T,\quad \alpha_3=(0,-3,4)^T,\quad \alpha_4=(3,0,-1)^T.$$

以下哪一组是该向量组的极大线性无关组 (　　).
(A) $\alpha_1$;　　(B) $\alpha_1,\alpha_2$;　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;　　(D) 以上答案都不对.

(4) 设诸 $\alpha_i$ 同上一小题, 齐次线性方程组 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\alpha_i=0$ 的解空间维数等于 (　　).
(A) 4 ;　　(B) 3 ;　　(C) 2 ;　　(D) 1.

(5) 投影映射

$$\varphi: K^3\to K^2,\quad (a,b,c)\mapsto(a,b)$$

的核空间 Ker$\varphi$ 与像空间 Im$\varphi$ 的维数分别等于 (　　).
(A) 1 和 1;　　(B) 2 和 1;　　(C) 2 和 2;　　(D) 1 和 2.

## 三、 填空题 (不需要写过程) (共 25 分, 每小题 5分)

(1) 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 5 & 2 & & & & \\ 2 & 5 & 2 & & & \\ & 2 & 5 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 5 & 2 \\ & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

的值等于_____.

(2) 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵 $A^*$ 等于_____,

(3) 设 $A$ 同上一小题, $B=I_3+A$, $C=A-I_3$, 那么满足 $BX=C$ 的三阶方阵 $X$ 等于_____.

(4) 设 $A \in M_n(K)$ 以及

$$B = \begin{pmatrix} I_n & A - I_n \\ A + I_n & A^2 \end{pmatrix} \in M_{2n}(K),$$

那么 $B^{-1}$ 等于_____.

(5) 已知 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) := \left\{ a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$$

的一组基, 那么线性映射

$$\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad \varphi(\alpha) = \sqrt{3}\alpha$$

在这组基下的表示矩阵等于_____.

四、 **计算题** (共 15 分) 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= b \\ x_1 + x_2 + bx_3 &= a \end{cases}$$

(1) 取 $a = b = 2$, 试用克莱默法则求方程组的解 (要求写简要过程).

(2) 问: $a, b$ 满足什么条件时, 方程组无解?

(3) 问: $a, b$ 满足什么条件时, 方程组有无穷多解? 并求此时的所有解 (要求写成列向量形式).

五、 **证明题** (共 10 分) 已知 $1, x, \ldots, x^n$ 是 $K$ 上的线性空间

$$K[x]_n := \{ f(x) \in K[x] \mid \deg f(x) \leq n \}$$

的一组基 ($n \geq 2$).

(1) 证明: 以下映射是线性映射:

$$\varphi : K[x]_n \to K[x]_n, \quad \varphi(f(x)) = xf'(x) - f(x).$$

(2) 证明: $\mathrm{Ker}\varphi = L(x)$ 且 $\mathrm{Im}\varphi = L(1, x^2, x^3, \ldots, x^n)$.

六、 **证明题** (共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$ 是幂零矩阵, 即 $A^k = 0$ 对某个正整数 $k$ 成立. 设 $f(x) \in K[x]$. 证明: $f(A)$ 是可逆矩阵当且仅当 $f(0) \neq 0$.