华东师范大学期中试卷: 2025—2026 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数　　教师姓名: 陆俊

学生姓名:　　学　　号:

专　　业:　　年级/班级: 2025 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表 $K[x]$ 中的多项式.

一、 (共 30 分) 设

$$f(x) = 2x^6 - 5x^5 - 7x^4 + 17x^3 + 13x^2 - 16x - 12$$

(1) 求 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处的 Taylor 展开式;

(2) 求 $f(x)$ 的所有有理根, 并指出它们的重数;

(3) 分别写出 (f, f') 和 $[f, f']$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的标准分解式.

二、 (共 20 分)

(1) 求最小次数的 $u, v \in K[x]$, 使得

$$u(x-1)^2(x+1)^2 + v(x^2+1) = 1.$$

(2) 求次数最小的多项式 $f(x) \in K[x]$, 满足如下同余方程组

$$\begin{cases} f(x) + 1 & \equiv 0 \pmod{(x+1)^2}, \\ f(x) + x^2 & \equiv 2x \pmod{(x-1)^2}, \\ xf(x) & \equiv 1 \pmod{x^2+1}. \end{cases}$$

三、 (共 10 分) 考虑 n 元对称多项式($n \geq 3$)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (2x_i x_j + (x_i - x_j)^2(x_i + x_j + 1)).$$

设 $F(x_1, \ldots, x_n)$ 是 f 在齐次分解表达式中次数最高的齐次部分.

(1) 求 f 的首项 $v(f)$ 以及次数 $\deg f$;

(2) 将 F 写为初等对称多项式 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的表达式 $(n \geq 3)$.

四、 (共 10 分) 考虑置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

求置换 ρ, 使得 $\sigma\rho = \tau\sigma$.

五、 (共 10 分) 请判断: $f(x) = 2x^5 + 5x + 6$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 是否可约? 若可约, 请给出标准分解式; 若不可约, 请说明理由.

六、 (共 10 分) 多项式 $f(x) \in K[x]$ 称为**可复合的**, 若存在次数大于 1 的多项式 $g(x), h(x) \in K[x]$, 使得 $f(x) = g(h(x))$. 证明: 若 $f(x)$ 是可复合的, 则 $\deg f$ 不是素数且 $f'(x)$ 是 $K[x]$ 中的可约多项式.

七、(共 10 分) 设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 是 n 次首一多项式$(n \geq 2)$, 满足

$$f'(x) \mid xf(x), \quad f'(0) = 0, \quad f(0) \neq 0.$$

证明:存在两个不同的非零复数 a, b 以及小于 n 的正整数 m, 使得 $\frac{b}{a} + \frac{n}{m} = 1$ 且

$$f(x) = (x-a)^m (x-b)^{n-m}.$$

可选附加题 (共 10 分) 给定非常值多项式 $p(x) \in K[x]$. 考虑 $K[x]$ 的子集合

$$S := \{f(x) \in K[x] \mid \deg f(x) < \deg p\}.$$

显然, 多项式加法运算在 S 中依旧是封闭的, 并且满足加法的诸公理. 但是乘法运算在 S 中并不封闭.

今对任何 $f, g \in S$, 我们定义 $*$ 运算: $f * g := r$, 这里 $r \in K[x]$ 是 $f \cdot g$ 除以 $p(x)$ 的余式. $*$ 运算在 S 中显然是封闭的.

证明: S 在多项式加法运算和 $*$ 运算下构成域的充分必要条件为 $p(x)$ 是不可约的.