华东师范大学期末试卷 (B): 2024—2025 学年第 2 学期

课程名称: 高 等 代 数 II　　教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2024 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, 所有矩阵 (线性空间、多项式)均是复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵 (线性空间、多项式); $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 表 m 行 n 列复矩阵全体, $M_n(\mathbb{C})$ 表 n 阶复方阵全体; χ_A 表方阵 A 的特征多项式; $m_A(\lambda)$ 表 A 的极小多项式; $\mathrm{tr}(A)$ 表示 A 的迹; $\overline{A}$ 表示 A 的复共轭矩阵; A^T 表示 A 的转置; $J_n(\lambda_0)$ 表示属于特征值 λ_0 的 n 阶若当块.

一、 (共 10 分) 求满足以下方程的所有方阵 $X \in M_4(\mathbb{C})$,

$$\begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_2(-1) \end{pmatrix} X = X J_4(1)$$

二、 (共 10 分) 求所有满足

$$X^4 = X^3$$

且不可对角化的 $X \in M_3(\mathbb{C})$.

三、 (共 10 分) 设 $A = J_2(\sqrt{2}) \cdot J_2(\sqrt{2})^T$, 求实正交矩阵 T 以及对角阵 D, 使得 $T^{-1}AT = D$.

四、 (共 10 分) 设二次型

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + \lambda z^2 + xz + xy + yz.$$

(1) 问: λ 取何值时, q 是正定的?
(2) 当 $\lambda = 0$ 时, 求 q 正惯性指数、负惯性指数以及秩.

五、 (共 20 分)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 求可逆矩阵 $P \in M_2(\mathbb{C})$ 及若当典范形 J, 使得 $P^{-1}AP = J$;

(2) 求 $\sin \frac{\pi A}{2}$ 与 $(A + I_2)^{-2}$ (**要求写出具体的矩阵**).

六、 (共 20 分) 考虑线性映射 $\varphi : \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^3$,

$$\varphi(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + 2y + z, \ -x + y + 2z).$$

(1) 求 φ 的若当典范形和极小多项式;

(2) 对 φ 的每个特征值 λ, 设 $W_\lambda(\varphi)$ 是属于 λ 的根子空间, 求 $W_\lambda(\varphi)$ 的基与维数.

七、 (共 10 分) 设 $A = J_n(0)$. 证明: $(I_n - A)^{-1} \sim I_n + A$.

八、 (共 10 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵. 证明: 若 A 负定, 则 A^{-1} 存在且负定.