华东师范大学期末试卷 (B): 2024—2025 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数　　教师姓名: 陆俊

学生姓名:　　学　　号:

专　　业:　　年级/班级: 2024 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m\times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹, A^T 表示 A 的转置, V, V' 表示 K 上线性空间.

一、 (共 20 分) 设线性映射 $\varphi: K^4 \to K^4$ 满足

$$\varphi(x,y,z,w) = (x+z, y+w, -x-y, -z-w).$$

(1) 求 φ 在标准基下的表示矩阵;

(2) 求核空间 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的维数与基;

(3) 求像空间 $\mathrm{Im}\varphi$ 的维数与基.

二、 (共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

(1) 求行列式 $|A|$ $(n \geq 2)$;

(2) 当 $n = 3, x = a = 1$ 时, 分别用两种方法求 A 的逆矩阵.

三、 (共 10 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

求齐次方程组 $AX = 0$ 的基础解系.

四、(共 10 分) 考虑 S_9 中的置换

$$\sigma = (143)(296)(578), \quad \tau = (18)(365)(29), \quad \rho = \tau\sigma\tau^{-1}.$$

求逆序数 $N(\rho)$ 和符号 $sgn(\rho)$.

五、(共 10 分) 求以下列向量组的秩以及极大线性无关组, 并将剩余的向量用它们线性表示出来.

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, -5)^T, \ \ \alpha_2 = (1, 1, -4, 2)^T,$$
$$\alpha_3 = (1, -2, 2, 2)^T, \ \ \alpha_4 = (-3, 0, 1, 1)^T.$$

六、(共 10 分) 设矩阵 $A \in M_n(K)$ 满足 $A^n = 0$ 且 $A^{n-1} \neq 0$.

(1) 已知

$$K[A] = \{f(A) \mid \deg f \in K[x]\}$$

是 K 上的线性空间, 证明: $K[A]$ 有一组基 $I_n, A, \cdots, A^{n-1}$.

(2) 证明: 以下映射是线性映射

$$\varphi : K[A] \longrightarrow K[A], \quad f(A) \mapsto Af(A),$$

且 $\mathrm{Ker}\varphi$ 由 A^{n-1} 生成.

七、(共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$ 满足 $A^2 = I_n$, 证明:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix} = n.$$

八、(共 10 分) 设 $\varphi : V \to V$ 及 $\psi : V \to V$ 均为 V 到自身的线性映射,

$$W := \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) \in \mathrm{Im}\psi\}, \quad U = \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) \in \mathrm{Ker}\psi\}.$$

证明: W 和 U 都是 V 的线性子空间.