华东师范大学期末试卷 (A): 2024—2025 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数 I　　教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2024 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m\times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹, A^T 表示 A 的转置, V, V' 表示 K 上线性空间.

一、 (共 10 分) 求以下置换的逆序数 $N(\sigma)$ 和符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 9 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

二、(共 10 分) 求以下 n 阶行列式 $(n \geq 2)$

$$f_n(x) := \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 1-x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

(需写成关于 x 的降幂展开式.)

三、 (共 10 分) 求线性方程组的通解 (要求写成列向量形式)

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 14, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 17. \end{cases}$$

四、 (共 20 分) 设线性映射 $\varphi : K^4 \longrightarrow K^4$ 满足

$$\varphi(x,y,z,w) = (y+z+w-3x, x+z+w-3y, x+y+w-3z, x+y+z-3w)$$

(1) 求 φ 在标准基下的表示矩阵;

(2) 求核空间 Kerφ 的维数与基;

(3) 求像空间 Imφ 的维数与基.

五、 (共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 用Cramer 法则求方程组 $AX = B$ 的唯一解 (需写出简要过程);

(2) 用初等行变换法求逆矩阵 A^{-1} (需写出简要过程)。

六、 (共 10 分) 已知 $M_2(K)$ 是 K 上的线性空间.

(1) 设

$$V := \{X \in M_2(K) \mid X + X^* = 0\}.$$

证明: V 是 $M_2(K)$ 的线性子空间, 并求它的一组基(这里 X^* 表示 X 的伴随矩阵);

(2) 证明: 以下映射是线性映射

$$\varphi : M_2(K) \to K^1, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a+b+c+d.$$

七、 (共 10 分) 设 $A, B \in M_n(K)$, 证明: 分块矩阵

$$D = I_{2n} + \begin{pmatrix} AB & A \\ B & O_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$$

是可逆矩阵, 并求 D^{-1} (这里 O_n 是 n 阶零矩阵).

八、 (共 10 分) 设 $\varphi : V \to V'$ 是线性映射且 $\dim V = \dim V'$, 证明: φ 是线性同构当且仅当存在 V 的基 $e_1, \cdots, e_n$ 以及 V' 的基 $e'_1, \cdots, e'_n$, 使得 $\varphi(e_i) = e'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.