华东师范大学期末试卷: 2020—2021 **学年第** 2 **学期**

课程名称:	代数几何 III (博士)	教师姓名:	陆俊
学生姓名:		学　　号:	
专　　业:	代数几何	年级/班级:	硕士、博士
课程性质:	专　业　选　修		

一	二	三	四	五	总分	阅卷人签名

一、 (共 20 分) 设 E 是秩 2 向量丛,

$$\Phi_{\alpha\beta} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

为过渡矩阵.
(1) 验证: S^2E 的过渡矩阵

$$S^2\Phi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

(2) 直接验证过渡矩阵 $S^2\Phi_{\alpha\beta}$ 满足余链条件.

二、 (共 20 分) 设

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

是无挠层的正合列, 且 $\mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{H})$, 证明: 以下条件彼此等价:

(1) $\mathcal{E}$ 是半稳定的,

(2) $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{H}$ 是半稳定的.

三、 (共 20 分) 设 M 是有限生成 R 模, m 是 R 的极大理想. $M_0 = M/mM$ 称为 M 的纤维.

(1) 证明: $M_0 = 0$ 当且仅当 $M = 0$. (提示: 考虑 M 的生成元 $m_1, \cdots, m_r$, 并且写 $m_i = \sum_j a_{ij} m_j$, $a_{ij} \in m$. 利用克莱姆法则说明 $m_i = 0$.)

(2) 证明: $m_1, \cdots, m_r$ 生成 M 当且仅当它们生成 M_0. (提示: 假设 $m_1, \cdots, m_r$ 生成 M_0, 令 $S = R\langle m_1, \cdots, m_r \rangle \subseteq M$, 对商模 M/S 应用 (1).)

(3) 设 $\varphi : M \to N$ 是 R 模同态. 证明: 诱导的纤维同态 $\varphi_0 : M_0 \to N_0$ 是满的当且仅当 φ 是满的.

四、 (共 20 分) 设 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 是复射影簇 X 上的局部自由层, H 是丰富除子, 证明:

(1) $\mu_H(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \mu_H(\mathcal{E}) + \mu_H(\mathcal{F})$.

(2) $\mu_H(S^n \mathcal{E}) = n\mu_H(\mathcal{E})$.

五、 (共 20 分) 证明: 半稳定丛之间的非零映射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ 必有 $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$.