华东师范大学期末试卷: 2020—2021 **学年第** 1 **学期**

课程名称:	代数几何 III	教师姓名:	陆俊
学生姓名:		学　　号:	
专　　业:	代数几何	年级/班级:	硕士、博士
课程性质:	专　业　选　修		

一	二	三	四	五	六	总分	阅卷人签名

一、 (共 30 分) 设 $f : S \to \mathbb{P}^1$ 是由射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上的三次曲线族

$$C_\lambda : \quad X^3 + Y^3 + Z^3 + 3\lambda XYZ = 0 \ (\lambda \in \mathbb{P}^1)$$

所诱导的相对极小纤维化. (注: C_∞ 即 $XYZ = 0$).

(1) 计算该纤维化的亏格 g, 相对不变量 K_f^2, e_f, χ_f 及 q_f;

(2) 描述所有奇异纤维在极小正规交模型下的对偶图, 并计算它们在相对极小模型下的奇异纤维陈数;

(3) 求 f 的一个稳定约化 $\pi : C \to \mathbb{P}^1$, 列出其半稳定纤维对偶图并计算该半稳定模型的相对不变量.

二、 (共 10 分) 对亏格 g 相对极小纤维化 $f : S \to C$, 试利用相对不变量计算相对多重典范层的次数 $\deg f_*\omega_{S/C}^{\otimes\nu}$ 及其秩 $\mathrm{rk} f_*\omega_{S/C}^{\otimes\nu}$.

三、 (共 10 分) 设 $f : S \to C$ 是亏格 g 小平纤维化, $b = g(C)$, 证明:

$$(g-1)(b-1) \geq 3\chi_f \geq 3.$$

四、 (共 20 分) 设 $f : S \to C$ 是亏格$g > 2$ 的纤维化, 它来自另一个亏格 γ 的纤维化 $\varphi : P \to C$ 的二次覆盖 (分歧轨迹光滑). 如果 φ 没有奇异纤维 且 $g \geq 4\gamma + 2$, 证明:

$$\lambda_f \geq \frac{4(g-1)}{g-\gamma}.$$

五、 (共 10 分) 试证明: 单连通纤维不可能是重纤维.

六、 (共 20 分) 设 $f : X \to B$ 是亏格 g 的相对极小纤维化, $F = mG$ 是某个 m 重纤维.

(1) 证明:

$$h^0(G, \mathcal{O}_G(kG)) = \begin{cases} 0, & m \nmid k, \\ 1, & m \mid k. \end{cases}$$

(2) 证明: 当 $1 \leq k \leq m$ 时,

$$h^0(\mathcal{O}_{kG}) = 1, \quad h^1(\mathcal{O}_{kG}) = 1 + \frac{k}{m}(g-1).$$