华东师范大学期末 (B) 试卷: 2019—2020 学年第 1 学期

课程名称:	代数几何荣誉课	教师姓名:	陆俊
学生姓名:		学　　号:	
专　　业:		年级/班级:	2017 级
课程性质:	专　业　必　修		

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, $\mathbb{P}^2$ (相应地, $\widetilde{\mathbb{P}}^2$) 指复数域上的射影平面, $[X,Y,Z]$ (相应地, $[\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}]$) 是 $\mathbb{P}^2$ (相应地, $\widetilde{\mathbb{P}}^2$) 的齐次坐标, (x,y) (相应地, $(\tilde{x},\tilde{y})$) 是对应的仿射坐标.

一、 (共 15 分) 设 $p=(0,0)$ 是 C 的奇点, C 在 p 附近的局部方程是 $f(x,y)=0$, 我们定义 C 在 p 处的 Milnor 数

$$\mu_p(C) := I_p\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

分别求以下情形的 Milnor 数、奇点重数 $m_p(C)$ 及 C 在 p 处切线.

(1) $f(x,y)=x^3+xy^3+y^7$;

(2) $f(x,y)=x^3+y^6+x^4y^4$.

二、 (共 15 分) 设椭圆曲线 $C: X^3+Y^3+Z^3=0$. 求 C 的牛顿形式

$$C_{a,b}: y^2=x^3+ax+b$$

以及 j-不变量.

三、 (共 15 分) 设 $\pi:\mathbb{P}^2\to\widetilde{\mathbb{P}}^2$ 满足仿射坐标表达式

$$(\tilde{x},\tilde{y})=\left(\frac{xy-x-y}{y-x-xy}, \frac{xy-x-y}{x-y-xy}\right).$$

(1) 验证 π 是双有理变换, 并求 π^{-1} 的仿射坐标表达式.

(2) 求直线 $L: X+Y+Z=0$ 的像曲线 $\widetilde{L}=\pi(L)$.

四、 (共 15 分) 考虑椭圆曲线 C:

$$y^2 = x^3 + 2x + 3$$

上的有理点 $p=(3,6)$. 求点 $2p$ (这里的加法指 C 的群加法).

五、 (共 15 分) 设 O, P, Q 是椭圆曲线 C 上的点.

(1) 证明: 存在唯一的点 R, 使得 $R \equiv P+Q-O$.

(2) 问: 上小题的 R 是否等于 $P \oplus Q$? (这里 $\oplus$ 是 C 的群加法, O 是零元). 如是, 请简要证明; 如错, 请举反例.

六、 (共 15 分) 考虑曲线 C: $XZ^3+YZ^3+X^4+Y^4=0$, 设 $p=[0,0,1]$.

(1) 证明: C 是光滑曲线, 并求 C 的亏格.

(2) 对每个 $n \geq 1$, 求 $l(np)$, 并分别给出 $L(3p)$ 和 $L(4p)$ 的基.

七、 (共 10 分) 设 C, D, E 是四次曲线, C, D 交 16 个不同点. 证明: 若 E 经过 $C \cap D$ 中的 13 个交点, 则剩下的三点共线.