华东师范大学期末 (A) 试卷: 2019—2020 学年第 1 学期

课程名称: 代数几何荣誉课　　教师姓名: 陆俊

学生姓名:　　学　　号:

专　　业:　　年级/班级: 2017 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, $\mathbb{P}^2$ (相应地, $\widetilde{\mathbb{P}}^2$) 指复数域上的射影平面, $[X,Y,Z]$ (相应地, $[\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}]$) 是 $\mathbb{P}^2$ (相应地, $\widetilde{\mathbb{P}}^2$) 的齐次坐标, (x,y) (相应地, $(\tilde{x},\tilde{y})$) 是对应的仿射坐标.

一、 (共 10 分) 设曲线 $C \subseteq \mathbb{P}^2$ 由如下方程定义:

$$X^2 - Y^2 - a^2Z^2 = 0, \quad a \neq 0.$$

试找一个射影变换 $\pi : \mathbb{P}^2 \to \widetilde{\mathbb{P}}^2$, 使得 $[0,0,1]$ 保持不动并且像曲线 $\widetilde{C} = \pi(C)$ 有标准方程

$$\widetilde{X}\widetilde{Y} = \widetilde{Z}^2.$$

二、 (共 10 分) 设椭圆曲线 $C : XZ^2 + X^2Z + Y^3 = 0$. 求 C 的牛顿形式

$$C_{a,b} : y^2 = x^3 + ax + b$$

以及 j-不变量.

三、 (共 20 分) 设 $\pi : \mathbb{P}^2 \to \widetilde{\mathbb{P}}^2$ 满足仿射坐标表达式

$$(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(\frac{x-y}{y(x+1)}, \frac{x(y-1)}{y(x+1)}\right).$$

(1) 验证 π 是双有理变换, 并求 π^{-1} 的仿射坐标表达式.

(2) 求 π 的例外曲线及无定义点.

(3) 求 $\pi^*(\frac{\widetilde{X}}{\widetilde{Y}})$, 这里 $\pi^* : Rat(\widetilde{\mathbb{P}}^2) \to Rat(\mathbb{P}^2)$ 是相应的有理函数域之间的态射.

四、 (共 20 分) 设曲线 C, D 分别由如下局部方程定义:

$$x^4 + 2x^2y^3 + y^6 + x^6 = 0, \quad x^3 + x^2y + y^4 = 0$$

(1) 分别求 $p = (0, 0)$ 处的奇点重数 $m_p(C)$ 及 $m_p(D)$.

(2) 分别求 C, D 在 p 处的切线.

(3) 求局部相交数 $I_p(C, D)$ 以及整体相交数 $I(C, D)$.

五、 (共 10 分) 考虑椭圆曲线 C:

$$y^2 = x^3 - x + 4$$

上的有理点 $p = (1, 2)$ 及 $q = (0, 2)$. 求有理点 $2p + q$ (这里的加法指 C 的群加法).

六、 (共 10 分) 考虑九个点 $P_{\alpha\beta} = (\alpha, \beta)$, 这里 $\alpha, \beta \in \{0, 1, -1\}$. 证明: 如果一条光滑三次曲线 E 经过除原点外的其余八个点, 则也必过原点.

七、 (共 20 分) 考虑费马曲线 $X^4 + Y^4 + Z^4 = 0$, $p \in C$ 是拐点.

(1) 证明: 典范除子 $K_C \equiv 4p$, 并求亏格 g.

(2) 证明:

$$l(np) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ n - 1, & 2 \le n \le 4, \\ n - 2, & n > 4. \end{cases}$$

(3) 设 $q \in H$ 不是拐点, 证明: $l(2q) = 1$.