华东师范大学期末试卷 (A)
2017—2018 学年第一学期

课程名称: 高等代数与解析几何III　　教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2016 级非师范班

课程性质: 专　业　必　修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、 (共 10 分) 求曲线

$$\begin{cases} yz = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕直线 $x = y = z$ 旋转生成的旋转曲面方程.

二、 (共 10 分) 求以原点为顶点, 以

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 2, \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

为准线的锥面方程.

三、(共 10 分)
已知柱面准线方程为

$$\begin{cases} y + z = 0, \\ x^2 - yz = 0, \end{cases}$$

母线方向为 $(1, 1, 1)$. 求该柱面方程.

四、(20 分)
考虑二次曲面 S: $x^2 - 2\alpha yz + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 请判断 S 的类型, 针对每个类型给出 α, β 的取值范围, 并写出标准型方程.

五、(20 分) 已知二次曲线 C:

$$x^2 + 2xy - 3y^2 + 4x - 6y - 10 = 0$$

(1) 求它的不变量 I_1, I_2, I_3 以及半不变量 J_1, J_2;
(2) 求它的中心以及渐近线.

六、(15 分)证明: 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的任何直母线在 xy-平面上的投影一定是其腰椭圆 (即 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) 的切线.

七、(15 分) 已知如下事实: 平面上任何不过原点的直线 L: $ax + by + c = 0$ 都可唯一确定一点 $Q(L) := (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$; 反之亦然.

设 C 是由如下方程定义的非退化二次曲线:

$$(x, y, 1)\mathscr{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

这里 $\mathscr{F}$ 是三阶对称阵. 对每个点 $P \in C$, 设 L_P 是 C 在 P 处的切线. 按照上述方法, 我们得到一个点 $Q(L_P)$ (不考虑那些过原点的切线). 当 P 沿着 C 移动时, $Q(L_P)$ 描绘出一条曲线 $C^\vee$.

证明: $C^\vee$ 仍为二次曲线且满足方程

$$(x, y, 1)\mathscr{F}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

备注: 曲线 $C : f(x, y) = 0$ 在 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P (y - y_0) = 0.$$