华东师范大学期中试卷
2016—2017 学年第二学期

课程名称: 高等代数与解析几何III　　教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2016 级非师范班

课程性质: 专　业　必　修

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	阅卷人签名

以下设平面 Π_1: $x+2y-2z-1=0$, 直线

$$L_1: \quad \begin{cases} x+3y-2z+3=0, \\ 2x+y-3z-1=0, \end{cases}$$

Π_2 是三角形 $\triangle ABC$ 所在的平面, 其中

$$A(1,-1,3), \quad B(-1,1,3), \quad C(0,-2,1).$$

一、 (共 10 分)
(1) 给出 L_1 的标准方程;
(2) 求平面 Π_2 的一般方程和截距方程;

二、 (共 20 分) 设 O 是原点.
(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;
(2) 求二重积 $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\times\overrightarrow{OC}$ 以及混合积 $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$
(3) 设 A 到直线 $\overline{BC}$ 的垂足为 H, 求 H 的坐标.

三、(共 30 分)
(1) 求直线 L_1 与平面 Π_1 的夹角;
(2) 求直线 L_1 与直线 $\overline{AB}$ 的距离及公垂线.
(3) 求平面 Π_3, 使得它平行于直线 L_1 与直线 $\overline{AB}$, 并且到这两条直线的距离相等.

四、(20 分)
(1) 求原点 O 关于平面 Π_1 的对称点 O', 并问: O,O' 是否在平面 Π_2

的同一侧?请给出解释.
(2) 求直线 L_1 在平面 Π_1 上的投影直线方程 L_1'.

五、(20 分)
(1) 证明: 对任何点 Q, 存在过 Q 的直线 $L(Q)$, 使得 $L(Q)$ 分别与直线 L_1 和直线 $\overline{AB}$ 共面.
(2) 证明: 若 Q 不落在这两条直线上, 那么上述 $L(Q)$ 是唯一的.
(3) 求所有这样的点 Q, 使得 $L(Q)$ 无法同时与 L_1 和 $\overline{AB}$ 相交.

六、(附加题 10 分) 设 $V = \mathbb{R}^4$ 是四维欧氏空间. 证明或否定如下结论: 存在 V 上的运算

$$* : V \times V \longrightarrow V, \quad (\alpha, \beta) \to \alpha * \beta,$$

满足以下诸条件:
(1) 反对称性 $\alpha * \beta = -\beta * \alpha$, $\forall \alpha, \beta \in V$;
(2) 线性性: $(k\alpha + l\beta) * \gamma = k(\alpha * \gamma) + l(\beta * \gamma)$, $\forall k, l \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$;
(3) 正交性: $\alpha * \beta \perp \alpha$ 且 $\alpha * \beta \perp \beta$, $\forall \alpha, \beta \in V$;
(4) 非退化性: 若 $\alpha * \beta = 0$ 对任何 $\beta \in V$ 成立, 则 $\alpha = 0$.
若存在, 请构造出具体的运算; 若不存在, 请给证明.