华东师范大学期末试卷 (A): 2014—2015 学年第 2 学期

课程名称: 组 合 与 图 论　　教师姓名: 陆俊

学生姓名:　　学　　号:

专　　业:　　年级/班级: 2012 级师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, n, m 均表正整数, $P(n,m)$ 表 n 的 m-分拆数, $P(n)$ 表 n 的分拆数; X 是 n 元有限集合; G 是作用在 X 上的有限群或一个非空图 (视具体题目而定); S_n 是 n 元置换群, C_n 是 n 阶循环群, D_n 是作用在正 n 边形上的二面体群; K_n 指 n 阶完全图. 请在答题中也采用同样的记号.

一、(20 分) 简述以下概念和结论 (**任选四项**).
(1) 平面图的 Euler 公式;
(2) 图的圈基;
(3) 图的关联矩阵;
(4) 顶点度数与边数的关系 (即"握手定理");
(5) $\{P(n)\}$ 的生成函数的无穷乘积表达式;
(6) G 的循环指标 $Z(G; x_1, \cdots, x_n)$.

二、(共 10 分) 设 $n = 5$.
(1) 写出 n 的所有分拆, 并求 $P(n, 3)$.
(2) 指出哪些分拆是自共轭分拆, 并画出自共轭分拆的 Ferrers 图.

三、(共 10 分) 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 循环群 $C_6 = \langle g \rangle$ 作用在 X 上, 这里 $g = (123)(45)(67)$. 试利用 Burnside 引理直接计算 C_6 的轨道个数. 进一步, 请具体写出这些轨道.

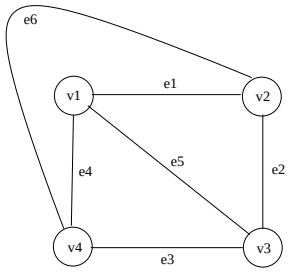
四、(10 分) 今有黑白珠各若干, 任取 6 颗穿成环形项链.
(1) 若只允许旋转, 问: 有多少种不同的项链?
(2) 若允许旋转和翻转, 问: 有多少种不同的项链?

五、(共 10 分) 求顶点度数依次满足

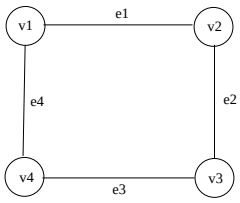
$$d(v_1) = 3, \quad d(v_2) = d(v_3) = 2, \quad d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = 1$$

的 6 阶树个数 $t(6; 3, 2, 2, 1, 1, 1)$. 进一步, 确定出其中互不同构的树.

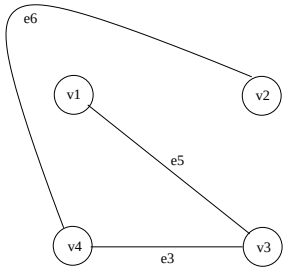
六、(共 20 分) 考虑图 G 如下:



(1) 求 G 的圈秩 $b_1(G)$.
(2) 求 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 以及它的谱.
(3) 求 G 的生成树个数, 并找出两个不同构的生成树.
(4) 考虑 G 的子图 E, H



E



H

分别求 E, H 的补图, $H \cap E$ 及 $H \cup E$.

七、(共 10 分) 证明: 完全图 K_5 不是平面图, 但是 Euler 图. 请具体指出其闭欧拉链.

八、(共 10 分) 设 G 是简单图, 顶点个数 $v(G) = 2n$, 且 G 不含任何完全图 K_3 作为其子图. 证明: 边数 $e(G) \leq n^2$, 并请构造满足此条件的图. (提示: 用归纳法, 并取其中一对相邻的点来考察.)