华东师范大学期末试卷 (A): 2014—2015 学年第 1 学期

课程名称: 拓 扑 学　　教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2014 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, X, Y 等均表示拓扑空间, f, g 等均表示连续映射.

一、(20 分) 简述以下概念或结论 (**任选四项**).
(1) 极限点紧; (2) 正规空间; (3) 一致连续性定理;
(4) 介值定理; (5) 粘接引理; (6) 可分空间.

二、(共 16 分) 判断以下三个拓扑空间 (通常拓扑下) 两两之间是否同胚, 并给出具体证明.

(1) $[0,1)$, (2) $(0,1)$, (3) $[0,1]$.

三、(16 分) 设 $f: S^1 \to \mathbb{R}^1$ 是从单位圆到直线的连续映射.
(1) 证明: 像集 $f(S^1)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的闭区间 (要求写出具体过程).
(2) 证明: f 不是单射.

四、(共 12 分) 设 $f: X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 处连续, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x_0. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

五、(共 12 分) 证明: $\mathbb{R}^n - \{O\}$ 与球面

$$S^{n-1} = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 \right\}$$

都是道路连通的 $(n > 1)$.

六、(共 12 分) 设 $\mathbb{R}_\ell$ 是由实数集 $\mathbb{R}^1$ 上的下限拓扑基

$$\mathscr{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$$

生成的拓扑空间.
(1) 证明: $\mathbb{R}_\ell$ 满足第一可数性公理.
(2) 证明: $\mathbb{R}_\ell$ 不满足第二可数性公理.

七、(共 12 分) 设 X 是正则空间, $x, y \in X$ 是不同的点. 证明: 存在开集 U, V 满足 $x \in U$, $y \in V$ 及 $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.