本科生基础课

复变函数讲义

陆　　俊

华东师范大学数学系

二零一二年一月

前　言

复变函数论主要研究复函数的微积分理论. 它是一门非常优美的数学理论, 产生了异常丰富的结果. 复变函数论是许多重要学科的基础, 比如代数几何、解析数论等等.

复变函数论从某种角度来讲, 可以看作是将数学分析从实数情形推广到复数情形. 因此很多地方具有极大的相似性, 对初学者来说, 较为容易掌握. 但复变函数论也有其独特的一面. 比如在复变函数论中, 积分与微分的关系异常密切. 数学分析中通常是利用导数来求积分. 复变函数则相反, 它是利用积分来求出导数. 又比如复变函数的另一个重要课题就是研究多值函数的性质, 这也是数学分析未能涉及的领域. 复变函数对多值函数的研究, 直接促使了黎曼曲面理论的发展—它是代数几何理论极为重要的基础.

本讲义是在由庞学成等教授主编的华东师范大学教材《复变函数》的基础上完成的. 这部讲义对原教材的教学顺序做了若干改动, 试图简化部分教学内容, 让主线更为突出. 讲义的内容安排大致如下: 第一部分介绍复数及复平面的初等性质. 第二部分介绍复变函数的微积分学. 第三部分介绍奇点理论以及残数的计算.

本讲义的写作得到了许多师生的支持与帮助. 作者要在这里特别感谢文平同学为我整理了最初的讲稿电子版本—其工作量是非常巨大的. 作者也同样感谢邢雪、董杰等等同学为我提供了许多有价值的文献资料. 最后作者也要感谢徐长桃同学为我校对讲稿。

本讲义成稿仓促, 未及细改, 错误必定不少, 诚恳希望各位读者能够批评指正.

目 录

第一章 复数与扩充复平面 1
1.1 复数 1
1.2 复平面 2
1.3 复数的表示 3
1.3.1 向量表示 3
1.3.2 三角表示 3
1.3.3 指数表示 4
1.4 代数学基本定理 5
1.5 单位根 5
1.6 复数列的极限 6
1.7 扩充复平面 7
1.7.1 无穷远点 7
1.7.2 球极投影 8
1.8 分式线性变换 8
1.8.1 分式线性变换 9
1.8.2 保圆周性 10
1.8.3 保交比性 11
1.8.4 保边界性 11
1.8.5 保对称性 12
1.8.6 应用:区域变换 13
本章习题 15
第二章 复函数与微积分 16
2.1 复变函数 16
2.1.1 初等单值函数 16
2.1.2 初等多值函数 17
2.1.3 连续函数 18
2.2 解析函数 18
2.2.1 可导函数与解析函数 18
2.2.2 柯西–黎曼条件 19
2.2.3 实可微与复可微关系 21
2.2.4 在分式线性变换中的应用 22
2.3 复积分 22
2.3.1 复积分的定义 23
2.3.2 复积分的计算 24
2.3.3 柯西积分定理 25
2.3.4 柯西积分公式 27
2.3.5 柯西导数公式 29

2.4 复积分的应用 30
2.4.1 柯西不等式 30
2.4.2 刘维尔定理 30
2.4.3 代数学基本定理证明 31
2.4.4 均值公式 31
2.4.5 最大模原理 32
2.4.6 许瓦兹引理 33
2.5 级数 33
2.5.1 级数的基本性质 33
2.5.2 幂级数 35
2.5.3 欧拉定理证明 36
2.5.4 零点孤立性定理 37
2.5.5 刚性定理 38
2.5.6 双边幂级数 39
2.5.7 傅里叶级数 40
本章习题 41
第三章 奇点与残数 42
3.1 奇点分类 42
3.1.1 孤立奇点 42
3.1.2 无穷远点 44
3.1.3 非孤立奇点 45
3.2 残数 46
3.2.1 有限奇点的残数 46
3.2.2 无穷远点的残数 48
3.3 残数定理 49
3.3.1 有界区域残数定理 49
3.3.2 无界区域残数定理 50
3.4 残数总和定理 52
3.5 辐角原理 53
3.5.1 对数导数的奇点与残数 53
3.5.2 对数导数的积分 54
3.5.3 幅角增量 55
3.5.4 辐角原理 57
3.6 儒歇定理 57
3.7 幅角原理与儒歇定理的应用 59
3.7.1 代数学基本定理另一证明 59
3.7.2 许瓦兹引理另一证明 59
3.7.3 单叶性定理 60
3.7.4 保区域性定理 61
3.7.5 实系数方程在半平面内的根数 61

3.8 残数定理的应用 63
3.8.1 三角有理函数的积分 63
3.8.2 有理函数的广义积分 65
3.8.3 加权有理函数的广义积分 66
3.8.4 定理 3.8.1 与定理 3.8.2 的证明及其他应用 67
3.8.5 双周期函数 69
本章习题 71
参考文献 72

第一章　复数与扩充复平面

1.1　复数

设方程 $x^2 = -1$ 的根为 $x_1 = \sqrt{-1}$, $x_2 = -\sqrt{-1}$. 记 $i := \sqrt{-1}$, 称作虚数单位. 这样, $i^2 = -1$.

定义 1.1.1　我们把如下形式的数

$$z := x + iy$$

称作复数, 此处 x, y 是任意实数. 我们把 x 称作 z 的实部, y 称作 z 的虚部, 并重新记作

$$x := \mathrm{Re}z, \qquad y := \mathrm{Im}z.$$

这样, 我们有 $z = \mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z$.

设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数. 我们规定

$$z_1 = z_2 \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad x_1 = x_2 \text{ 且 } y_1 = y_2.$$

以及

$$z_1 \text{ 是实数} \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{Im}z_1 = 0.$$

定义 1.1.2　复数 $z = x + iy$ 的共轭复数定义为 $\bar{z} := x - iy$.

显然我们有

$$\mathrm{Re}z = \mathrm{Re}\bar{z}, \qquad \mathrm{Im}z = -\mathrm{Im}\bar{z}$$

以及 $\bar{\bar{z}} = z$.

类似实数情形, 我们也可以定义复数之间的加减乘运算:

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &:= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &:= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

这些运算满足交换律、结合律和分配律 (留给读者验证).

例 1.1.1　对 $z = x + iy$, 我们有

(1) $z + \bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}z$,

(2) $z - \bar{z} = 2iy = 2i\mathrm{Im}z$,

(3) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. ■

此外, 我们也可以定义复数 $z = x + iy$ 的倒数

$$\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

这样, 我们也可以定义复数之间的除法运算

$$\frac{z_2}{z_1} := z_2 \cdot \frac{1}{z_1}.$$

有时为了强调复数有加减乘除四则运算, 我们就把全体复数构成的集合称作*复数域*, 并记作 $\mathbb{C}$. 全体实数构成的集合称作*实数域*, 并记作 $\mathbb{R}$. 类似地, 我们将有理数域记作 $\mathbb{Q}$, 整数集合记作 $\mathbb{Z}$. 显然

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

利用这些运算以及共轭复数的定义, 我们也得到如下结论

命题 1.1.1

$$\mathrm{Re}z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

1.2 复平面

如何将复数用直观的方式表现出来? 这是个有趣的问题. 注意到复数 $z = x + iy$ 是由实部 x 和虚部 y 唯一确定的, 因此我们可以把复数 z 直接看成平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点 (x, y). 换言之, 我们建立以下的一一对应

$$\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad z = x + iy \to (x, y).$$

我们把这种表示方法称作复数的*坐标表示*. 此时平面 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ 也称做*复平面*. 天才数学家高斯最早引入了复平面概念, 因此有时我们也将此称作*高斯平面*.

利用这种表示, 我们可以将平面上的曲线方程替换成 $z, \bar{z}$ 的表达式.

例 1.2.1 (1) 直线方程 $ax + by + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. 将 $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ 代入即得

$$(a - ib)z + (a + ib)\bar{z} + 2c = 0,$$

也可以写为更简洁的形式 $\mathrm{Re}((a - ib)z) = -c$.

(2) 圆周方程 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $(a, b, r \in \mathbb{R})$ 类似可写成

$$z\bar{z} - (a - ib)z - (a + ib)\bar{z} + (a^2 + b^2 - r^2) = 0,$$

也可以写为更简洁的形式 $|z - (a + ib)| = r$. ■

更一般的, 方程 $f(x, y) = 0$ 定义的曲线总可写成

$$f(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}) = 0.$$

我们把这种方程称作 f 的*复化方程*. 反过来, 如果事先知道复化方程

$$F(z, \bar{z}) = 0.$$

我们可以将 $z = x + iy$,$\bar{z} = x - iy$ 代入求得原始方程 $f(x, y) = 0$. 这一过程称作复方程的*实化*.

注 1.2.1 请注意, 对于一般的方程 $F(z, \bar{z}) = 0$, 实化后的方程定义的轨迹不一定得到曲线. 比如 $z + 2\bar{z} = 0$ 实化为 $3x - iy = 0$. 由此推得 $x = y = 0$. 换言之, 该方程定义的轨迹恰为原点. ■

1.3 复数的表示

1.3.1 向量表示

由于平面上的点 (x,y) 也可以看作从原点出发指向 (x,y) 的向量, 因此我们也可以将 $z=x+iy$ 视作向量 $\vec{z}=(x,y)$. 这种表示方法称作复数的向量表示.

引理 1.3.1 复数作为向量的加法减法运算和复数本身的加减法运算是一致的, 即

$$\overrightarrow{z_1+z_2}=\vec{z}_1+\vec{z}_2,$$
$$\overrightarrow{z_1-z_2}=\vec{z}_1-\vec{z}_2.$$

向量本身还有长度的概念, 因而我们也可定义复数 $z=x+iy$ 的模 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 由例 1.1.1 (3) 可知 $|z|^2=z\bar{z}$.

命题 1.3.1 (三角不等式) 设 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, 则有

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|,$$
$$||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|.$$

此外, 复数的模显然满足以下恒等式

$$|z_1|\cdot|z_2|=|z_1z_2|. \tag{1-1}$$

1.3.2 三角表示

我们把向量 $\vec{z}$ 与 x 轴的夹角记作 θ, 称作复数 x 的幅角. 设模长 $r=|z|$. 因为 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 所以我们也可将 $|z|$ 写成

$$z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

上述表示称作复数的三角表示.

容易看到, 将 θ 换成以下任何一个值:

$$\theta\pm2\pi,\theta\pm4\pi,\cdots,\theta\pm2k\pi,\cdots$$

都不会影响三角函数的值, 从而也不会影响复数 z 的三角表示. 因此我们有时把

$$\mathrm{Arg}z:=\{\theta+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

中的值统称为 z 的幅角. $\mathrm{Arg}z$ 中任何两个值都相差 2π 的整数倍. 当我们特别指定 $\mathrm{Arg}z$ 中的一个值, 比如 θ, 我们就称该值为 z 的主幅角, 记作 $\arg z$. 通常为了讨论方便, 人们总是选取主幅角满足 $-\pi<\arg z\le\pi$. 此外, $z=0$ 的幅角可以是任意值.

命题 1.3.2 设 z 的主幅角在 $(-\pi,\pi]$ 内, 我们有

(1) z 是正 (负) 实数当且仅当 $\arg z=0$ ($\arg z=\pi$).

(2) $\mathrm{Im}z>0$ 当且仅当 $0<\arg z<\pi$.

(3) 当 z 不是负实数时, $\arg z+\arg\bar{z}=0$.

例 1.3.1　设 z 的主幅角在 $(-\pi,\pi]$ 内.

(1) $z=-2i$ 的模长 $|z|=2$, 主幅角 $\arg z=-\frac{\pi}{2}$, 三角表示为

$$-2i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

(2) $z=1+i$ 的模长 $|z|=\sqrt{2}$, 主幅角 $\arg z=\frac{\pi}{4}$, 三角表示为

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

如果我们不考虑幅角之间相差的 2π 倍数, 那么显然有以下公式

$$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2=\mathrm{Arg}z_1z_2.$$

1.3.3　指数表示

天才数学家欧拉将复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 写成如下的指数表示

$$z=re^{i\theta},$$

这里

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\approx 2.71828\cdots.$$

是自然对数.

这种表示法看上去很奇怪, 其实是有很自然的背景的. 我们将在后文解释为什么欧拉要这么表示复数. 这里我们先承认如下事实.

命题 1.3.3　(1) $r_1e^{i\theta_1}=r_2e^{i\theta_2}$ 的充分必要条件是

$$r_1=r_2,\quad \theta_1-\theta_2=2k\pi, \text{对某个} k\in\mathbb{Z}.$$

(2) $e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

(3) $e^{i\theta_1}/e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

(4) $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

由定义 $r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$ 即得

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

特别地, 取 $\theta=\pi$, 我们有

定理 1.3.1 (**欧拉公式**)　$e^{i\pi}+1=0$.

类似地, 还有 $e^{\frac{i\pi}{2}}=i$, $e^{2ik\pi}=1$ 等等.

例 1.3.2　(1) 由例 1.3.1, $z=-2i$ 的指数表示为 $-2i=2e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

(2) $z=1+i$ 的指数表示为 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

(3) $z=1-i$ 与上例中的 $1+i$ 共轭, 故模仍为 $\sqrt{2}$, 主幅角可取 $-\frac{\pi}{4}$, 从而有指数表示 $\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

(4)$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k$ 的指数表示可以通过命题 1.3.3 的运算规则来简单求出:

$$z=\left(\frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}\right)^k=\left(e^{\frac{i\pi}{4}-\left(-\frac{i\pi}{4}\right)}\right)^k=\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^k=e^{\frac{ik\pi}{2}}.$$

因此它的模长 $|z|=1$, 主幅角可取为 $\arg z=\frac{k\pi}{2}$. ■

由命题 1.3.3 (3) 立得以下著名结论.

定理 1.3.2 (**棣美弗公式**)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

棣美弗公式可以计算出三角函数的倍角公式.

例 1.3.3 (1) 展开

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\cos\theta\sin\theta.$$

由棣美弗公式即得

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta,\\ \sin 2\theta &= 2\cos\theta\sin\theta.\end{aligned}$$

(2) 类似地, 可得三倍角公式

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,\\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.\end{aligned}$$

■

1.4 代数学基本定理

上一节中, 我们通过求方程 $x^2 = -1$ 的根最终引入了复数的概念. 这就产生了一个自然的问题: 通过其他多项式方程的求根, 是否会引入复数以外的新"数"呢? 答案是否定! 这就是著名的代数学基本定理, 由高斯最早给出严格的证明.

定理 1.4.1 (**代数学基本定理**) 设

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

是 n 次复系数多项式, 则方程 $f(z) = 0$ 恰好有 n 个复数根 $z = \gamma_i$, $i = 1, \cdots, n$ (这里 γ_i 允许相同). 换言之, 在复数域内, 我们有因式分解

$$f(z) = a_n(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)\cdots(z - \gamma_n).$$

这个定理的证明有许多种, 我们将在后文介绍其中的几种. 需要指出的是, 代数学基本定理的任何证明都不可能是纯代数的, 它一定会涉及到函数的连续性这类拓扑性质.

接下去一个自然的问题当然是如何求出多项式方程的根. 对不超过四次的多项式方程, 人们已经找到了求根公式. 但遗憾的是, 英年早逝的天才数学家阿贝尔证明了五次及五次以上方程没有一般的求根公式. 另一位天才数学家伽罗华创建了"群论"进一步揭示了方程求根与群的关系.

1.5 单位根

尽管一般的多项式方程没有求根公式, 但是对于一些特殊的方程, 我们可以计算求根. 比如以下的 n 次方程

$$z^n - 1 = 0.$$

让我们来求解这个方程. 将 $z = re^{i\theta}$ 及 $1 = e^{i0}$ 代入方程得

$$r^n e^{in\theta} = e^{i0}.$$

另一方面, 由命题 1.3.3 (1) 即得

$$r = 1, \quad n\theta = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

亦即 $|z| = 1$, $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. 令 $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $z = e^{\frac{2ki\pi}{n}} = \omega^k$ 是方程 $z^n - 1 = 0$ 的根.

引理 1.5.1 $\omega^m = \omega^l$ 当且仅当 $\frac{m-l}{n}$ 是整数.

证明 $\omega^m = \omega^l$ 等价于 $e^{\frac{2im\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}}$. 由命题 1.3.3 (1), 这又等价于 $\frac{2m\pi}{n} = \frac{2l\pi}{n} + 2k\pi$, 此处 k 是某个整数. 这一条件相当于说 $\frac{m-l}{n} = k$ 是整数. ■

命题 1.5.1 方程 $z^n - 1 = 0$ 的根恰好为以下 n 个值:

$$1 = \omega^0, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad \cdots, \quad \omega^{n-1}.$$

换言之, 我们有以下因式分解

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}). \tag{1-2}$$

证明 我们先证明 $1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}$ 两两不同. 假若 $\omega^m = \omega^l$, $0 \le m, l \le n-1$. 由引理 1.5.1, $\frac{m-l}{n}$ 是整数. 由于 $|l-m| < n$, 所以这就推出 $m = l$.

由代数学基本定理, 方程 $z^n - 1 = 0$ 恰有 n 个根, 故 $1, \omega, \cdots, \omega^{n-1}$ 恰好是方程的所有根. ■

定义 1.5.1 满足方程 $z^n = 1$ 的根称作 n 次单位根. 假设 z 是 n 次单位根, 并且对任何小于 n 的正整数 m 都有 $z^m \neq 1$, 我们就称 z 是 n 次本原单位根.

例 1.5.1 (1) 上述的 $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ 显然是 n 次本原单位根. 1 虽然是 n 次单位根, 但不是本原的.

(2) 2 次单位根仅有 $1, -1$, 其中 -1 是本原的.

(3) 3 次单位根有 1, $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 及 $\omega^2 = \bar{\omega}$. 本原单位根仅有 ω, ω^2.

(4) 4 次单位根有 $\pm 1, \pm i$, 其中本原单位根仅有 $i, -i$. ■

n 次本原单位根的个数记作 $\varphi(n)$, 它也称作欧拉函数. 这是初等数论中最重要的数论函数之一. 由例 1.5.1, 我们有 $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$.

在式 (1-2) 中, 我们利用韦达定理即得如下结论.

推论 1.5.1 n 次本原单位根 ω 也是方程 $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$ 的根, 亦即

$$\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \cdots + \omega + 1 = 0.$$

推论 1.5.2 $\bar{\omega} = \omega^{-1} = -(\omega^{n-2} + \omega^{n-3} + \cdots + \omega + 1)$.

1.6 复数列的极限

考虑 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$. 我们定义 z_1, z_2 之间的欧氏距离

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

我们显然有以下不等式

$$\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}\le|z_1-z_2|\le|x_1-x_2|+|y_1-y_2|. \tag{1-3}$$

设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是复数序列, z_0 是给定复数.

定义 1.6.1 *如果对任意正实数 ε, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时总有*

$$|z_n-z_0|<\varepsilon,$$

我们就称 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 z_0 为极限, 并记作 $z_0=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$.

设 $z_n=x_n+iy_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 判断复数列有无极限的问题可以化为实数情形来讨论.

命题 1.6.1 *$z_0=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 当且仅当*

$$\begin{cases} x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\\ y_0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n. \end{cases}$$

证明 ($\Longrightarrow$) 已知 $z_0=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$. 由定义, 对任意正实数 ε, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时总有 $|z_n-z_0|<\varepsilon$. 进一步由不等式 (1-3) 可知

$$|x_n-x_0|<\varepsilon,\quad |y_n-y_0|<\varepsilon.$$

因而 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $y_0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

($\Longleftarrow$) 已知 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $y_0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. 对任意正实数 ε, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时有

$$|x_n-x_0|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |y_n-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由不等式 (1-3) 可知, $|z-z_0|<\varepsilon$. 这就推出 $z_0=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$. ■

1.7 扩充复平面

1.7.1 无穷远点

设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是复数序列. 如果对任意正数 $M>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|z_n|>M$, 我们就定义

$$\infty:=\lim_{n\to\infty}z_n.$$

∞ 称为复平面的*无穷远点*. 我们称 $\overline{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ *为扩充复平面*

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\infty$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty}|y_n|=\infty$ 有一个成立, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$. 但反过来结论未必成立. 下面举一个例子说明之.

例 1.7.1 令 $z_n=ne^{\frac{in\pi}{2}}$. 此时 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$, 但是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$, $\lim\limits_{n\to\infty}|y_n|$ 均不存在. ■

细心的读者可能会有这样的疑问, 对于两个不同的复数序列, 比如 $\lim\limits_{n\to\infty}n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}ni$, 它们的极限会不会定义出不同的无穷远点 ∞ 呢? 为了回答这一问题, 我们首先要给无穷远点一个严格定义. 这就是下一小节要处理的问题.

1.7.2 球极投影

考虑三维空间中的单位球

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

北极点记作 $N = (0, 0, 1)$. 我们将平面 $x_3 = 0$ 看作复平面 $\mathbb{C}$. 换言之, 复平面上每一点 $z = x + iy$ 可以看作三维空间中的点 $(x, y, 0)$.

现在我们要将单位球 $S^2 \setminus \{N\}$ 上的点和复平面 $\mathbb{C}$ 上的点一一对应起来. 具体方法如下: 从北极点 N 出发作一射线通过 z, 该射线与单位球相交唯一的点, 记作 $\Phi(z)$. 利用解析几何计算可知,

$$\Phi(z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) = \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right). \quad (1\text{-}4)$$

显然, 从式 (1-4) 可以看到, 对任何 z 来说, $\Phi(z)$ 不可能是北极点 N. 这样我们就得到映射

$$\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}, \quad z = x + iy \to \Phi(z).$$

反过来, 对球面上除了 N 外的每一点 $P = (x_1, x_2, x_3)$, 我们也可以连接射线 $\overline{NP}$, 它和复平面相交于唯一的一个点, 记作 $\Psi(P)$. 由解析几何计算可得

$$\Psi(P) = \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}. \quad (1\text{-}5)$$

这就得到映射

$$\Psi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad P \to \Psi(P).$$

容易验证, $\Psi\Phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, $\Phi\Psi = \mathrm{Id}_{S^2\setminus\{N\}}$.

上面的映射 Φ 或 Ψ 称作球极投影. 我们可以将 Ψ 的定义扩充到北极点 N 上, 即规定 $\Psi(N) := \infty$. 反过来, 也可以定义 $\Phi(\infty) = N$. 这样, 我们就得到扩充的球极投影

$$\Phi : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2, \quad \text{或} \quad \Psi : S^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}.$$

这就建立了扩充复平面与球面之间的一一对应.

推论 1.7.1 *考虑复数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. 以下条件等价:*
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$,
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(z_n) = N$.

球极投影有如下美妙性质 (留给读者证明)

命题 1.7.1 *(1) 假设 L 是复平面上的直线, 那么 $\Phi(L)$ 是 S^2 上经过 N 的圆周, 反之亦然.*
(2) 假设 C 是复平面上的圆周, 那么 $\Phi(C)$ 是 S^2 上不经过 N 的圆周, 反之亦然.

1.8 分式线性变换

在高等代数中, 我们经常研究向量空间上的各种变换映射. 比如空间的仿射变换 (旋转、平移、伸缩). 我们也希望将这样的研究推广到扩充复平面上.

1.8.1 分式线性变换

考虑两个扩充复平面, 分别用 z, w 来表示上面的复数. 我们关心如下形式的映射

$$f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \to w := \frac{az+b}{cz+d},$$

这里 a, b, c, d 是给定的复系数, 并且满足 $ad - bc \neq 0$. 这样的映射称作分式线性变换或者 Möbius 变换. 特别地,

$$f(\infty) := \frac{a}{c}, \quad f(-\frac{d}{c}) := \infty.$$

我们先考察一些特殊的分式线性变换.

例 1.8.1 (1) $w = z + h$ (h 是给定的复数) 就是通常的平移.
(2) $w = e^{i\theta}z$ (θ 是给定的实数) 即通常的旋转.
(3) $w = rz$ ($r > 0$ 是给定的正实数) 则是通常的伸缩映射.

这三类映射的复合可以统一写成如下形式

$$w = kz + h,$$

此处 k, h 是给定的复数. 我们把上式定义的分式线性变换称作相似变换. ■

例 1.8.2 $w = \frac{1}{z}$ 定义的分式线性变换称作反演变换. ■

引理 1.8.1 任何分式线性变换都存在逆映射, 并且后者也是分式线性变换.

证明 考虑分式线性变换

$$f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad z \to w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

容易验证如下分式线性变换是 f 的逆.

$$f^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \qquad w \to z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

引理 1.8.2 分式线性变换的复合也是分式线性变换.

证明 考虑分式线性变换 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 及 $g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$, 则

$$f(g(z)) = \frac{ag(z)+b}{cg(z)+d} = \frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} = \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')}.$$

引理 1.8.3 任何分式线性变换必是相似变换与反演变换的复合.

证明 设 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. 若 $c = 0$, 则 f 是相似变换, 命题显然成立. 今设 $c \neq 0$. 此时 f 是以下相似变换与反演变换的复合

$$f(z) = \left(\frac{cb-ad}{c}\right)\left(\frac{1}{cz+d}\right) + \frac{a}{c}.$$

1.8.2 保圆周性

由命题 1.7.1, 复平面上的圆周 (相应地, 直线) 对应球面上不过 (相应地, 过) 北极点 N 的圆周. 因此在扩充复平面内直线和圆周没有什么差别, 无非直线是包含了无穷远点 ∞ 的圆周而已. 因此我们以下将这两者都统称为扩充复平面内的圆周, 不再加以区分.

引理 1.8.4 *扩充复平面内任何圆周都能写成如下标准方程:*

$$Az\bar{z} + \overline{B}z + B\bar{z} + C = 0, \tag{1-6}$$

这里 $A, C \in \mathbb{R}$ 且 $|B|^2 - AC > 0$. 特别地, $A = 0$ 当且仅当该方程定义了复平面内的直线.

定理 1.8.1 (**保圆周性**) *分式线性变换总是将圆周映为圆周.*

证明 由引理 1.8.3, 我们只需要讨论相似变换和反演变换情形即可. 如果是相似变换, 结论是显然的. 以下我们考虑反演变换.

由引理 1.8.4, 我们将 $w = \frac{1}{z}$ 代入式 (1-6) 整理得

$$Cw\bar{w} + Bw + \overline{B}\bar{w} + A = 0.$$

因此由理 1.8.4 即知上述方程定义了扩充复平面内的圆周. ■

例 1.8.3 (1) 求圆周方程 $|z - 1| = 1$ 在反演变换下的像.

我们将 $w = \frac{1}{z}$ 代入原方程得 $|w - 1| = |w|$. 两边平方得

$$(w - 1)(\bar{w} - 1) = w\bar{w}.$$

展开上式整理即得

$$w + \bar{w} = 1.$$

(2) 求直线方程 $iz - i\bar{z} = 1$ 在反演变换下的像.

将 $w = \frac{1}{z}$ 代入原方程得 $\frac{i}{w} - \frac{i}{\bar{w}} = 1$. 整理得

$$w\bar{w} + iw - i\bar{w} = 0,$$

即 $|w - i| = 1$. ■

上面的例子也可以归结为以下的一般性叙述.

推论 1.8.1 *复平面圆周 $|z - z_0| = r$ 在反演变换 $w = \frac{1}{z}$ 下的像是*

$$\begin{cases} \left|w - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}\right| = \frac{r}{||z_0|^2 - r^2|}, & \text{若} r \neq |z_0|, \\ \mathrm{Re}(z_0 w) = \frac{1}{2}, & \text{若} r = |z_0|. \end{cases}$$

直线 $\mathrm{Re}(\bar{z}_0 z) = -c$ ($c \in \mathbb{R}$) 在反演变换下的像是

$$\begin{cases} |w + \frac{\bar{z}_0}{2c}| = |\frac{\bar{z}_0}{2c}|, & \text{若} c \neq 0, \\ \mathrm{Re}(z_0 w) = 0, & \text{若} c = 0. \end{cases}$$

1.8.3 保交比性

任取扩充复平面内的四个不同点 z_1, z_2, z_3, z_4 (允许取无穷远点). 我们定义交比

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \left(\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right). \tag{1-7}$$

如果 z_i 中某点是无穷远点, 交比定义可以简化. 比如 $z_4 = \infty$ 时,

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := 1 \Big/ \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\right).$$

又如 $z_1 = \infty$ 时,

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \left(\frac{1}{z_4 - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{z_3 - z_2}\right) = \left(\frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}\right).$$

定理 1.8.2 (保交比性) 分式线性变换保持交比不变, 即对 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 及 $w_i = f(z_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 有

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

证明 由引理 1.8.3, 我们只需要讨论相似变换和反演变换情形即可. 如果是相似变换, 结论是显然的. 以下考虑反演变换. 我们将 $w = \frac{1}{z}$ 代入式 (1-7) 得

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) := \left(\frac{\frac{1}{z_4} - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_4} - \frac{1}{z_2}}\right) \Big/ \left(\frac{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}}\right).$$

上式右边直接整理即得 (z_1, z_2, z_3, z_4). ■

例 1.8.4 求分式线性变换 $w = f(z)$ 使得 $f(0) = \infty$, $f(1) = 1$, $f(1+i) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

由保交比性, 我们有

$$(\infty, 1, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, w) = (0, 1, 1+i, z).$$

展开上式即得

$$\left(\frac{1}{w-1}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - 1}\right) = \left(\frac{z-0}{z-1}\right) \Big/ \left(\frac{1+i-0}{1+i-1}\right).$$

整理即得 $w = \frac{1}{z}$. ■

1.8.4 保边界性

我们先解释一下什么是区域.

定义 1.8.1 复平面 $\mathbb{C}$ 上的区域 $\mathscr{D}$ 是指满足以下诸条件的点集:
(1) (开条件) 对 $\mathscr{D}$ 中任何点 z, 都可以找到以它为圆心的小圆盘, 使得该圆盘完全含于 $\mathscr{D}$ 内;
(2) (连通性) 对 $\mathscr{D}$ 中任何点 z, z', 我们都可以找到连接 z, z' 的曲线, 使得该曲线完全含于 $\mathscr{D}$ 内.

区域的边界和我们通常的理解完全一样, 这里不再严格定义了. 我们可以按如下方式规定边界的走向: 当你沿着边界行走时, 区域总是在你的左手边. 今后如无特别申明, 我们总是默认这样的边界走向为正方向. 区域及其边界的并集通常称作闭域.

下面介绍几种特殊的区域.

例 1.8.5　(1) 上半平面

$$\mathscr{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}.$$

它的边界就是实轴 $\mathbb{R} = \{z \mid \mathrm{Im} z = 0\}$ (包括无穷远点), 其正方向为从左到右.

(2) 以 z_0 为圆心的开圆盘

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

它的边界就是圆周 $C = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, 其正方向为逆时针方向.

(3) 以 ∞ 为圆心的开圆盘

$$B(\infty, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}.$$

它的边界就是圆周 $C = \{z \mid |z| = R\}$, 其正方向为顺时针方向.

(4) 以 z_0 为圆心的双边圆环

$$H(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

它的边界有两条, 一条是圆周 $C_1 = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, 以顺时针方向为正向; 另一条是圆周 $C_2 = \{z \mid |z - z_0| = R\}$, 以逆时针方向为正向. ■

定理 1.8.3 (**保边界性**)　设 $\mathscr{D}$ 是区域, $w = f(z)$ 是分式线性变换. 那么 $f(\mathscr{D})$ 也是区域, 它的边界就是 $\mathscr{D}$ 的边界在 f 下的像, 且定向不变.

例 1.8.6　求上半平面 $\mathscr{H}$ 在反演变换下的像区域.

$\mathscr{H}$ 的边界是实轴, 因此反演变换下, 该边界的像也是实轴. 由保边界性立知, 像区域的边界也是实轴, 且方向从右到左. 因此按照边界定向的规定, 像区域是下半平面. ■

1.8.5　保对称性

假设 C 是圆周或者直线, z_1, z_2 是扩充复平面上两点.

定义 1.8.2　如果 z_1, z_2, C 满足以下条件之一, 我们就称 z_1, z_2 关于 C 对称.
(1) C 是直线, z_1, z_2 关于 C 在通常意义下镜像对称.
(2) C 是圆周 $|z - z_0| = r$, z_1, z_2 满足 $(z_1 - z_0)\overline{(z_2 - z_0)} = r^2$. 换言之, z_0, z_1, z_2 三点共线, 并且 $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = r^2$. 特别地, 当 $z_1 = z_0$ 时, 我们规定对称点 $z_2 = \infty$.

定理 1.8.4 (**保对称性**)　分式线性变换保持对称性不变. 换言之, 若 z_1, z_2 关于扩充复平面内的圆周 C 对称, 那么 $f(z_1), f(z_2)$ 关于像曲线 $f(C)$ 也对称.

证明　我们只需验证反演变换保对称性即可. 这里只考虑一种情况, 其余情形均可类似推出. 设 C 是圆周 $|z - z_0| = r$, 且 $|z_0| \neq r$. 由推论 1.8.1, 像曲线 $f(C)$ 的方程

$$\left| w - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \right| = \frac{r}{||z_0|^2 - r^2|}.$$

为证明反演变换有保对称性, 我们只需要按照对称的定义直接验证如下等式

$$\left(\frac{1}{z_1} - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \right) \left(\frac{1}{\bar{z}_2} - \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2} \right) = \left(\frac{r}{|z_0|^2 - r^2} \right)^2, \tag{1-8}$$

这里 z_1, z_2 关于 C 是对称点, 既满足 $(z_1 - z_0)(\bar{z}_2 - \bar{z}_0) = r^2$, 展开该式也相当于

$$|z_0|^2 - r^2 = z_1\bar{z}_0 + \bar{z}_2 z_0 - z_1\bar{z}_2. \tag{1-9}$$

式 (1-8) 左边等于

$$\frac{1}{z_1\bar{z}_2} \cdot \frac{1}{(|z_0|^2 - r^2)^2} \cdot \left(|z_0|^2 - r^2 - \bar{z}_0 z_1\right)\left(|z_0|^2 - r^2 - z_0\bar{z}_2\right).$$

利用式 (1-9), 上式进一步简化为

$$\frac{1}{z_1\bar{z}_2} \cdot \frac{1}{(|z_0|^2 - r^2)^2} \cdot (\bar{z}_2 z_0 - z_1\bar{z}_2)(z_1\bar{z}_0 - z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{(|z_0|^2 - r^2)^2} \cdot (z_0 - z_1)(\bar{z}_0 - \bar{z}_2)$$

因此上式就等于 (1-8) 的右边. ■

例 1.8.7　求分式线性变换 $w = f(z)$ 满足 $f(0) = 1$, $f(i) = 2i$, 并且将上半平面仍映为上半平面.

上半平面的边界是实轴. 注意到 $-i$ 和 i 关于实轴对称, 因此由保对称性立知 $f(-i)$ 与 $f(i) = 2i$ 也关于实轴对称, 从而 $f(-i) = -2i$. 进一步由保交比性可得

$$(1, 2i, -2i, w) = (0, i, -i, z).$$

这样就得到 $w = \frac{-4z-2}{z-2}$. ■

1.8.6　应用:区域变换

利用分式线性变换, 我们可以将一个区域变到另一个区域. 这样的问题大致分两类. 一类是已知分式线性变换, 求出像区域. 还有一类则是给定像区域, 求出可能的分式线性变换.

例 1.8.8　单位开圆盘 $B(0,1) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ 在反演变换下的像区域恰好变为单位圆盘的外部

$$B(\infty, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}.$$

反过来, 单位圆盘的外部在反演变换下成为了单位圆盘内部. 这种内外的互换正是"反演"一词的本意. ■

例 1.8.9　设 $f(z) = \frac{z-1}{iz+1}$, 区域 $\mathscr{D}$ 由边界曲线

$$C_1 : |z| = 1, \qquad C_2 : \mathrm{Re}((1-i)z) = 1$$

所围成. 求像区域 $f(\mathscr{D})$ 及像曲线 $f(C_1)$, $f(C_2)$.

我们先求出逆变换

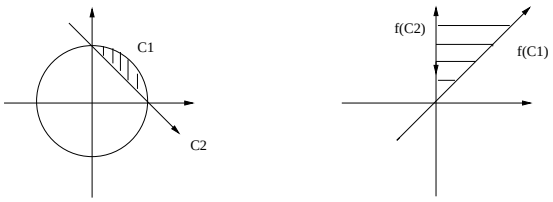
$$z = \frac{w+1}{-iw+1} \tag{1-10}$$

将式 (1-10) 代入 C_1 的方程 $|z| = 1$, 即得 $|w+1| = |-iw+1|$. 两边平方后, 得

$$w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = w\bar{w} - iw + i\bar{w} + 1,$$

即 $\mathrm{Re}((1+i)w) = 0$, 这就是 $f(C_1)$ 的方程. 类似可得 $f(C_2)$ 的方程 $\mathrm{Re}(w) = 0$.

虽然我们现在知道了像区域的边界, 但是还未能完全确定是哪个区域. 有几种办法可以确定它.

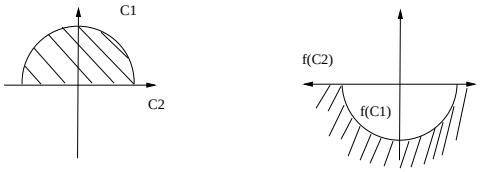


方法一: 我们可以取 $\mathscr{D}$ 中一点 z_0, 那么 $f(z_0)$ 必落在像区域中, 换言之包含该点的区域就是我们所要的. 比如令 $z_0=\frac{1}{2}+\frac{3i}{4}$, 那么 $f(z_0)=\frac{4}{5}+\frac{7i}{5}$. 这就确定了像区域的位置.

方法二: 由保边界性, 像区域的边界定向也是正向的, 因此我们只需要确定边界的定向. 比如在 C_1 先后经过三点 $1, e^{\frac{i\pi}{4}}, i$. 因此 $f(C_1)$ 先后经过这三点的像, 即 $0, e^{\frac{i\pi}{4}}, \infty$, 这就确定了 $f(C_1)$ 的定向. 类似可确定 $f(C_2)$ 的定向. ■

例 1.8.10　设 $f(z)=\frac{1}{z}$, 区域 $\mathscr{D}$ 由边界曲线

$$C_1:|z|=1, \qquad C_2:\mathrm{Im}z=0$$



所围成. 用类似方法可求出像区域

$$f(\mathscr{D})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>1 \text{ 且 } \mathrm{Im}z<0\}.$$

具体验证留给读者. ■

例 1.8.11　求所有的分式线性变换 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, 使得上半平面 $\mathscr{H}$ 仍然变为上半平面.

$\mathscr{H}$ 的边界是实轴. 由保边界性以及假设条件, f 将实轴仍然映为实轴, 即对 $\forall z\in\mathbb{R}$, 总有 $f(z)\in\mathbb{R}$. 这样, 由保交比性可知 a,b,c,d 皆实数.

进一步, 为了保证上半平面映入上半平面, 我们可取$\mathscr{H}$ 中任一点, 使得该点的像也落入$\mathscr{H}$ 中. 比如取 $z=i$, 那么 $f(i)\in\mathscr{H}$, 即

$$0<\mathrm{Im}\frac{ai+b}{ci+d}=\frac{ad-bc}{c^2+d^2},$$

亦即 $ad-bc>0$.

反过来, 也可验证所有满足 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 及 $ad-bc>0$ 的分式线性变换必将 $\mathscr{H}$ 映为 $\mathscr{H}$. ■

例 1.8.12　求所有的分式线性变换 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, 使得上半平面 $\mathscr{H}$ 变为单位开圆盘 $B(0,1)$.

由保边界原理, 实轴映为单位圆周. 换言之, $\forall z\in\mathbb{R}$, 总有 $|f(z)|=1$. 我们假设 $z_0\in\mathscr{H}$ 满足 $f(z_0)=0$. 由保对称性, $f(\bar{z}_0)=\infty$. 这就推出

$$f(z)=k\cdot\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}, \quad k\in\mathbb{C}.$$

由前讨论可知 $|f(0)|=1$, 代入上式可得 $|k|=1$, 故可写为 $k=e^{i\theta}$.

反过来可验证, 若 $f(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$, $\mathrm{Im}z_0>0$, 则必将 $\mathscr{H}$ 映为 $B(0,1)$. ■

例 1.8.13　求所有的分式线性变换 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, 使得单位开圆盘 $B(0,1)$ 仍映为单位开圆盘.

设 $z_0\in B(0,1)$ 满足 $f(z_0)=0$. 此时, z_0 关于单位圆周的对称点为 $\frac{1}{\bar{z}_0}$. 由保对称性得 $f(\frac{1}{\bar{z}_0})=\infty$. 这就推出

$$f(z)=k\cdot\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1},\quad k\in\mathbb{C}.$$

另一方面, $f(0)=kz_0$ 与 $f(\infty)=\frac{k}{\bar{z}_0}$ 关于单位圆周对称, 所以 $|k|^2=1$, 即 $k=e^{i\theta}$.

反过来可验证, 若 $f(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1}$, $|z_0|<1$, 则必将单位圆盘映为自身. ■

例 1.8.14　求所有的分式线性变换 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, 使得单位开圆盘 $B(0,1)$ 映为单位开圆盘的外部 $B(\infty,1)$.

类似上例可得

$$f(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{z-z_0}{\bar{z}_0z-1},\quad |z_0|>1.$$

当然, 我们也可以利用例 1.8.8 和例 1.8.13 直接得到. ■

本章习题

加 $*$ 号的习题表示有一定难度.

习题 1.1　验证复数加法和乘法满足交换律、结合律和分配律.

习题 1.2　给出 $z=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^n$ 的指数表示, 并确定它在 $(-\pi,\pi]$ 内的主幅角.

习题 1.3　利用式 (1-1), 证明以下恒等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

习题 1.4　设 $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$ 是 5 次本原单位根, $\lambda=\omega+\omega^4$, $\mu=\omega^2+\omega^3$.

(1) 证明: $\lambda+\mu=\lambda\mu=-1$, 并求出 λ,μ.

(2) 进一步利用上面结论计算出 ω 的具体值.

(3) 求 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 的根式表达式.

(4*) 试推广以上方法, 求出 17 次本原单位根的具体值.

习题 1.5　验证式 (1-4), (1-5).

习题 1.6　证明命题 1.7.1.

第二章　复函数与微积分

类似数学分析的研究, 我们在讨论了复数以及扩充复平面的基本性质之后, 很自然地需要进一步深入探讨复变函数的微积分学. 这就是本章的主要任务.

2.1　复变函数

设 $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}$ 是一个子集 (比如区域), 我们把映射 $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ 称作 $\mathscr{D}$ 上的*复变函数*, 常记作 $w = f(z), \forall z \in \mathscr{D}$.

如果对任何 $z \in \mathscr{D}$, 函数值由表达式 $w = f(z)$ 唯一确定, 我们就说 f 是*单值函数*; 否则就称为*多值函数*.

2.1.1　初等单值函数

下面例举一些经典的初等单值函数.

例 2.1.1　(1) 常值函数 $w = c$ (c 是给定的常数), 定义域是整个复平面 $\mathbb{C}$.
(2) 幂函数 $w = z^n$ (n 是正整数), 定义域为 $\mathbb{C}$.
(3) *多项式函数*

$$w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \overline{\mathbb{C}},$$

其定义域也是 $\mathbb{C}$.
(4) $w = \frac{1}{z^n}$ (n 是正整数), 定义域是 $\mathbb{C} - \{0\}$.
(5) *有理函数* $w = \frac{f(z)}{g(z)}$, 这里 $f(z), g(z)$ 都是多项式函数. 分式线性变换是最简单的有理函数之一. ■

例 2.1.2　(1) *指数函数*

$$w = e^z := e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

这里 $z = x + iy$. 它的定义于是整个复平面 $\mathbb{C}$. 特别地, 从定义可以看到 $|e^z| = e^{\mathrm{Re}z}$, 并且可取主幅角 $\arg e^z = \mathrm{Im}z$.
(2) *三角函数*

$$w = \begin{cases} \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{cases}$$

以及 $w = \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ 和 $w = \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$. 由三角函数的定义, 我们得到如下公式

$$\begin{cases} e^{iz} := \cos z + i \sin z, \\ e^{-iz} := \cos z - i \sin z. \end{cases}$$

若取 z 为实数, 上式即为欧拉公式.

作为一个具体例子, 我们取 $z = i$, 则 $\sin i = \frac{1}{2i}(e^{-1} - e) = \frac{i}{2}(e - e^{-1})$. ■

例 2.1.3　(1) 共轭函数 $w = \bar{z}$.
(2) 模长函数 $w = |z|^2 = z\bar{z}$, 类似还有 $w = \mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, 及 $w = \mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. ■

2.1.2 初等多值函数

我们举一些多值函数的例子.

例 2.1.4 幅角函数 $w = \mathrm{Arg}z$. 若取定主幅角 $\arg z$, 那么

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此对每个 $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, 它都有无限多个取值. ■

例 2.1.5 n-次根函数

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i\mathrm{Arg}z}{n}}.$$

它是幂函数 $z = w^n$ 的反函数. 对于给定的 z, 根据代数学基本定理, 方程 $w^n = z$ 关于 w 恰有 n 个根. 换言之, n-次根函数 $w = z^{\frac{1}{n}}$ 恰有 n 个取值. 取定主幅角 $\arg z$ 后, 这 n 个值分别为

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i}{n}(\arg z + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

容易验证, 除了 $z = 0$外, 这 n 个取值两两不同.

特别地, 取 $z = 1$, 则

$$\sqrt[n]{1} = 1, \omega, \cdots, \omega^{n-1},$$

这里 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是 n 次本原单位根.

类似地, 我们还可以定义指数为分数的幂函数 $w = z^{\frac{m}{n}}$. ■

例 2.1.6 对数函数

$$w = \ln z := \ln|z| + i\mathrm{Arg}z, \quad z \neq 0.$$

如取定主幅角 $\arg z$, 则

$$w = \ln z := \ln|z| + i(\mathrm{arg}z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此对数函数也有无穷个取值. 比如取 $z = 1$, 则 $\ln 1 = 2k\pi i$; 如取 $z = -1$, 则 $\ln(-1) = (2k+1)\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$. ■

例 2.1.7 广义幂函数

$$w = z^\alpha := e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha(\ln|z| + i\mathrm{Arg}z)},$$

这里 α 是给定复数. 如果 α 是整数, 这就是通常的幂函数, 因而是单值函数. 如果 $\alpha = \frac{1}{n}$, 则它就是 n-次根函数. 对一般的 α 来说, 该函数有无限多个取值.

比如取 $\alpha = z = i$, 我们有

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\ln|i| + \frac{i\pi}{2} + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi - \frac{\pi}{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

例 2.1.8 反三角函数

$$w = \arcsin z := \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

以及 $w = \arccos z := \frac{\pi}{2} - \arcsin z$.

让我们解释一下为何反三角函数有这样的定义式. 首先, 我们有

$$z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}).$$

整理后即得

$$(e^{iw})^2 - 2iz \cdot e^{iw} - 1 = 0.$$

注意到当 $w = 0$ 时, $z = \sin w = 0$. 对上式利用二次方程求根公式则推出

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

这里我们要求 $\sqrt{1} = 1$. 由此即得 $w = \arcsin z$ 的表达式. ■

2.1.3 连续函数

设 $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的单值函数.

定义 2.1.1 设 $z_0 \in \mathscr{D}$, 函数极限 $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在, 是指对任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$.

$f(z)$ 在 $z = z_0$ 处连续是指存在极限 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. 如果 $w = f(z)$ 在区域内每点都连续, 我们就说它是 $\mathscr{D}$ 上连续函数.

设 $z = x + iy$, $w = u + iv$. 函数 $w = f(z)$ 可以写为

$$w = u(x, y) + iv(x, y),$$

即 u, v 都是 x, y 的实二元函数.

类似命题 1.6.1 的讨论, 我们有

引理 2.1.1 设 $z_0 = x_0 + iy_0$. 函数 $w = f(z)$ 在 $z = z_0$ 处连续, 当且仅当实二元函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 皆在 (x_0, y_0) 处连续.

第 2.1.1 节的例子都是连续函数, 我们不再赘述.

2.2 解析函数

设 $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的单值函数, $z_0 \in \mathscr{D}$.

2.2.1 可导函数与解析函数

定义 2.2.1 (1) 如果存在极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

我们就说 $w = f(z)$ 在 $z = z_0$ 处可导 (可微), 并将该极限称作 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的导数, 记作 $f'(z_0)$ 或 $\frac{df}{dz}|_{z=z_0}$ (如果强调值域变量 w, 也可写作 $\frac{dw}{dz}\big|_{z=z_0}$).

(2) 如果 $w = f(z)$ 在 z_0 的某个小邻域 $B(z_0, \varepsilon)$ 内处处可导, 我们就说 f 在 z_0 处解析. 如果 f 在区域 $\mathscr{D}$ 上每点都解析, 我们就称 f 是 $\mathscr{D}$ 上的解析函数.

我们后面会看到, 解析条件要比可微条件强了很多. 这里例举一个结论来说明, 证明放在后面再介绍.

定理 2.2.1 解析函数具有任意阶导数.

无论如何, 在数学分析里, 很多例子都表明仅仅具有导数不一定能保证有任意阶导数, 甚至连二阶导数都不存在.

复变函数的求导与数学分析中的实函数求导完全一致. 我们这里仅举几例说明.

例 2.2.1 (1) $w = z^n$ 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数, 导函数 $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1}$.
(2)$w = e^z$ 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数, 导函数 $\frac{dw}{dz} = e^z$.
(3) $w = \cos z$ 以及 $w = \sin z$ 也是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数, 导函数分别为

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

上述求导公式可以直接从三角函数的定义 (例 2.1.2) 得到. ■

例 2.2.2 $w = \bar{z}$ 虽然处处连续但是处处不可微, 即对任何 $z_0 \in \mathbb{C}$, 不存在极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}.$$

值得注意的是, 在数学分析里, 要构造处处连续但处处不可微的函数是比较困难的. 这也从侧面间接反映出复可微性要强于实可微性. ■

2.2.2 柯西–黎曼条件

从导数的定义可以看到, 极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

与 z 趋向于 z_0 的方式无关. 这实际上是一个相当苛刻的条件. 让我们回顾数学分析中关于实函数的求导. 由于变量是实数, 因此趋向于极限点的方向只有向左或向右有两种, 从而就有右导数和左导数两种极限. 只有当左右导数相等时, 函数才有导数.

这样的思想也可以用于复变函数的求导. 设 $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathscr{D}$. 为方便书写, 我们记

$$\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y, \qquad \Delta f = f(z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v.$$

假设 $f'(z_0)$ 存在. 我们首先让 z 沿着竖直方向趋向于 z_0, 即 $\Delta x = 0$. 这就有

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} + \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)}.$$

同样地, 让 z 沿着水平方向趋向于 z_0, 即 $\Delta y = 0$, 从而有

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} + i \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)}.$$

比较两式, 我们就得到所谓的柯西–黎曼条件

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{(x_0, y_0)} = \quad \frac{\partial v}{\partial y}\big|_{(x_0, y_0)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}\big|_{(x_0, y_0)} = -\frac{\partial v}{\partial x}\big|_{(x_0, y_0)}. \end{cases}$$

更一般的结论如下, 我们不再详细证明它.

定理 2.2.2 $f'(z_0)$ 存在当且仅当
(1) $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处满足柯西–黎曼条件.
(2) $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

在复变函数里可微和可导是一回事. 但在多元实函数里, 可微性要比可导性强了很多. 上面的结论告诉我们, 复变函数的可导性与其实虚部的二元函数可微性相比也强得多, 他们需要满足极为苛刻的柯西–黎曼条件.

推论 2.2.1 *函数 $w = f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 内解析, 当且仅当 u, v 是 $\mathscr{D}$ 上的可微函数, 且在 $\mathscr{D}$ 内恒满足柯西–黎曼条件*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

注 2.2.1 柯西-黎曼条件在研究肥皂膜问题中有着重要应用. 数学中有很多抽象理论, 尽管表面上看似乎离现实很远, 但实际上它们常常成为物理学或其他学科的强有力工具. ■

例 2.2.3 令 $z = x + iy$, $f = u + iv$. 我们来验证一些解析函数的柯西-黎曼条件.

(1) $w = z^2$ 是 $\mathbb{C}$ 上解析函数. 此时有 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \quad 2x = \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

(2) $w = e^z$, 此时 $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \quad e^x \cos y = \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

(3) $w = \frac{1}{z}$ 是 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上的解析函数, 此时 $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

■

例 2.2.4 (1) 由前已知 $w = \bar{z}$ 处处不可微. 此时 $u = x$, $v = -y$ 虽然都是可微函数, 但不满足柯西黎曼条件. 具体言之,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

(2) $w = \sqrt{|xy|}$, 此时 $u = \sqrt{|xy|}$, $v = 0$. 容易验证, 在 $(0,0)$ 处

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

但 u 在 $(0,0)$ 处不可微. 因此 $w = \sqrt{|xy|}$ 作为复函数在 $z = 0$ 处不可微. ■

推论 2.2.2 *如果可微函数 u, v 在区域 $\mathscr{D}$ 内满足柯西-黎曼条件, 并且它们具有二阶偏导数, 那么*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

有时我们简记 $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 它称作*拉普拉斯算子*. 满足关系式

$$\Delta u = 0$$

的二元实可微函数称作*调和函数*. 推论 2.2.2 就是说, 解析函数的实部虚部都是调和函数, 并且满足柯西-黎曼条件. 一个有趣的问题是, 如果给定一个调和函数 u, 是否存在另一个调和函数 v, 使得 $f(z) = u + iv$ 是解析函数? 若这样的 v 存在的话, 我们就说 v 是 u 的*共轭调和函数*.

2.2.3 实可微与复可微关系

考虑区域 $\mathscr{D}$ 上的函数 (不要求可微)

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\quad z=x+iy\in\mathscr{D}.$$

我们假设 u,v 是可微的. 显然 $f(z)$ 可以看成 x,y 的二元复值函数.

回顾命题 1.1.1, 我们有

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{2-1}$$

因此 $f(z)$ 可写为 $z,\bar{z}$ 的二元复函数

$$f(z)=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

现在我们希望对上述 f 求形式偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}$. 利用链式法则, 我们有

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z},\\ \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}.\end{cases}$$

由式 (2-1), 我们有

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2},\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2i}.$$

代入链式求导公式后, 即得

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).\end{cases} \tag{2-2}$$

上式也可以反过来求出偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, 即

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\quad\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}},\\ \frac{\partial f}{\partial y}=i\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\right).\end{cases}$$

请注意, 这里的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 不是我们前面说的导数 $\frac{df}{dz}$, 因为我们并没要求函数是可导的.

另一方面,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y},$$

将它们代入式 (2-2), 即得

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).\end{cases} \tag{2-3}$$

命题 2.2.1 *以下各条件相互等价:*

(1) $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$;

(2) u,v *是满足柯西-黎曼条件的可微函数*;

(3) $f(z)$ *是可微的*;

(4) $f(z)$ *的表达式中不出现* $\bar{z}$ *项*.

证明 (1) 和 (4) 的等价性是显然的, 这来自于偏导数为零的定义. (2) 和 (3) 的等价性来自于定理 2.2.2. (1) 和 (2) 的等价性来自于式 (2-3). ■

例 2.2.5　设 $f(z)=ax^2+by^2+2cxyi$, 这里 $z=x+iy$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

(1) 我们先求形式偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. 利用式 (2-2), 即得

$$\frac{\partial f}{\partial z}=(a+c)x+(c-b)yi, \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=(a-c)x+(c+b)yi.$$

当然我们也可以式 (2-1) 先将 $f(z)$ 写为

$$f(z)=a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+b\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+2ci\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

然后求形式偏导.

(2) 求 $f(z)$ 解析的充分必要条件. 由命题 2.2.1, $f(z)$ 解析的充要条件是

$$0=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=(a-c)x+(c+b)yi,$$

即 $a=c=-b$, 以及 $f(z)=az^2$. 另一种方式是直接利用柯西-黎曼条件来验证. ■

2.2.4 在分式线性变换中的应用

设 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ 是分式线性变换 $(ad-bc\neq 0)$. 容易求出其导函数

$$f'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

有时我们也将 f 写成 $f(z)=k\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}$, 那么

$$f'(z)=k\cdot\frac{(z_1-z_2)}{(z-z_2)^2}.$$

特别地, 如取 $z=z_1$, 则 $f'(z_1)=\frac{k}{z_1-z_2}$.

例 2.2.6　求分式线性变换 $w=f(z)$, 将上半平面 $\mathscr{H}$ 映为单位圆盘 $B(0,1)$, 并且 $f(i)=0$, $\arg f'(i)=-\frac{\pi}{2}$.

由例 1.8.12 及条件 $f(i)=0$, 可知 $f(z)$ 可写为

$$f(z)=e^{i\theta}\cdot\frac{z-i}{z+i}.$$

因此 $f'(i)=\frac{e^{i\theta}}{2i}=\frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$. 进一步由条件 $\arg f'(i)=-\frac{\pi}{2}$ 立得 $\theta=0$.

综上可知, $f(z)=\frac{z-i}{z+i}$. ■

2.3 复积分

让我们回顾数学分析中的定积分

$$\int_a^b f(x)dx.$$

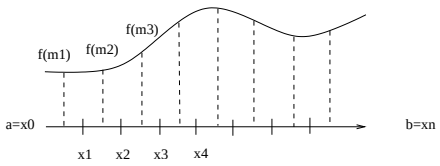
它由三个要素构成: 实变量 x, 积分函数 $f(x)$, 积分区间 $[a,b]$. 我们首先在积分区间 $[a,b]$ 插入点列

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

将积分区间分割成小线段 $[x_{i-1}, x_i]$, 并在其中选取一点 m_i. 然后我们用以下极限定义了定积分

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{||T||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

这里 $||T|| = \max\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$.

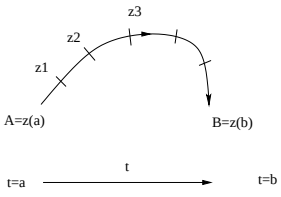


2.3.1 复积分的定义

现在我们模仿这一思路定义复积分. 我们将实变量 x 替换为复变量 z, 实函数 $f(x)$ 替换为复函数 $f(z)$, 积分区间 $[a,b]$ 替换为复平面上的参数曲线

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a,b].$$

我们规定曲线 C 的定向: 从端点 $A = z(a)$ 出发到端点 $z(b) = 0$ 结束. 我们也在 C 上插入点列 $A = z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = B$,



从而将 C 分割成小弧段 $\widetilde{z_{i-1}z_i}$, 并在其中选取一点 m_i. 然后我们用以下极限定义了 $f(z)$ 的复积分

$$\int_C f(z)dz := \lim_{||T||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)(z_i - z_{i-1}),$$

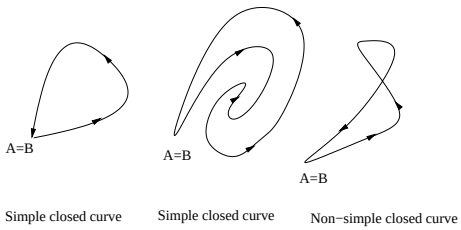
这里 $||T|| = \max\limits_{1\le i\le n}|z_i - z_{i-1}|$.

注 2.3.1 (1) 我们用 C^- 表示 C 的反向, 即从端点 B 出发到端点 A 终止. 我们规定

$$\int_{C^-} f(z)dz := -\int_C f(z)dz$$

.

(2) C 有一种特殊情形: 简单闭曲线, 即端点 $A = B$, 并且曲线本身不会出现自交.



我们规定简单闭曲线的逆时针方向为正向. 以下如无特别声明, 我们总是默认简单闭曲线取正向.

(3) 假设 $C = C_1 + C_2$ 是由两条曲线 C_1, C_2 连接起来得到的, 我们就规定

$$\int_C f(z)dz := \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

(4) 复积分也满足线性性

$$\int_C (\alpha f + \beta g)dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz,$$

这里 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. ■

2.3.2 复积分的计算

与数学分析中的实积分计算类似, 复积分也可以通过变量替换来计算. 设 C 是由参数方程

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b]$$

定义的曲线, 并且它是逐段光滑的—即 $x(t), y(t)$ 是 t 的逐段光滑函数.

引理 2.3.1 (变量替换公式)

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dt. \tag{2-4}$$

例 2.3.1 求 $\int_C \frac{1}{z^n}dz$ (n 是正整数), 这里 $C : |z| = r$.

我们将 C 参数化

$$z = re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

由变量替换公式

$$\int_C \frac{1}{z^n}dz = \int_0^{2\pi} \frac{(re^{i\theta})'}{(re^{i\theta})^n} \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{ie^{i\theta}}{e^{in\theta}}d\theta = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}d\theta.$$

如果 $n = 1$, 那么由上式可得

$$\int_C \frac{1}{z^n}dz = 2\pi i.$$

如果 $n > 1$, 那么

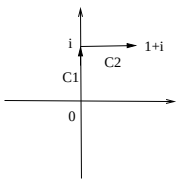
$$\int_C \frac{1}{z^n}dz = \frac{i}{r^{n-1}} \left(\frac{e^{i(1-n)\theta}}{(1-n)i} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

细心的读者会发现, 这一积分的结果与积分曲线的半径 r 无关. 事实上, 这并非偶然现象. 我们将在后面给出解释. ■

例 2.3.2 设 $f(z) = \mathrm{Re}(z^2)$, 对以下各曲线 C 求积分 $\int_C f(z)dz$.

(1) $C : z(t) = t + it$ ($t \in [0, 1]$). 此时 $z^2 = it^2$, 故 $f(z) = 0$, $\forall z \in C$. 因此 $\int_C f(z)dz = 0$.

(2) $C = C_1 + C_2$, 这里 C_1 是从 0 到 i 的直线, C_2 是从 i 到 $1 + i$ 的直线.



我们先计算 C_1 上积分. C_1 参数化为 $z(t)=ti$, $t\in[0,1]$. 故由变量替换公式得

$$\int_{C_1} f(z)dz=\int_0^1(-t^2)\cdot(ti)'dt=-i\int_0^1 t^2dt=-\frac{i}{3}.$$

类似地, C_2 参数化为 $z(t)=t+i$, $t\in[0,1]$, 我们有 $\int_{C_2} f(z)dz=-\frac{2}{3}$. 综合可知 $\int_C f(z)dz=-\frac{2}{3}-\frac{i}{3}$.

(3) $C=C_1+C_2$, 这里 C_1 是从 0 到 1 的直线, C_2 是从 1 到 $1+i$ 的直线. 类似可得 $\int_C f(z)dz=\frac{1}{3}+\frac{2i}{3}$. 具体验证留给读者完成. ■

复积分也可以归结为实函数的第二类线积分计算. 因为

$$f(z)dz=(u+iv)(dx+idy)=(udx-vdy)+i(vdx+udy),$$

所以

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy. \tag{2-5}$$

如果将 C 的参数方程 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ $(a\le t\le b)$ 代入(2-5), 则有

$$\begin{aligned}\textstyle\int_C udx-vdy&=\textstyle\int_a^b\left(u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)\right)dt,\\ \textstyle\int_C vdx+udy&=\textstyle\int_a^b\left(v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)\right)dt.\end{aligned} \tag{2-6}$$

综合式 (2-5) 和 (2-6), 我们就得到变量替换公式 (2-4).

2.3.3 柯西积分定理

在数学分析中, 最重要的定理是牛顿-莱布尼兹公式, 即 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$ 满足

(1) $F'(x)=f(x)$,

(2) $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

一个很自然的问题, 当然是问: 复变函数中是否也有类似牛顿-莱布尼兹公式这样的微积分基本定理呢? 让我们先来分析一下. 假设 $w=f(z)$ 是一个连续函数, 曲线 C 从端点 a 出发到端点 b 终止. 我们要计算积分 $\int_C f(z)dz$. 假设我们也能找到所谓的"原函数" $F(z)$ 使得

(1) $F'(z)=f(z)$,

(2) $\int_C f(z)dz=F(b)-F(a)$.

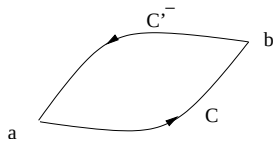
条件 (1) 说明 $F(z)$ 是解析的, 因而由定理 2.2.1 可知 $f(z)$ 也是解析函数. 条件 (2) 等式右边只和曲线的端点 a,b 有关, 和曲线的路径选择无关. 我们不妨选取另一条曲线 C', 它也是以 a 为起点, 以 b 为终点, 并假设 C,C' 没有其他交点. 那么我们有

$$\int_C f(z)dz=F(b)-F(a)=\int_{C'} f(z)dz.$$

进一步, 我们考虑 C' 的逆向 C'^-. 由命题 2.3.1 及上式, 我们有

$$\int_{C+C'^-} f(z)dz=\int_C f(z)dz-\int_{C'} f(z)dz=0.$$

请注意 $C+C'^-$ 是一条简单闭曲线.



因此我们看到, 如果 $f(z)$ 有所谓的"原函数" , 那么它不但是解析的, 而且在任何简单闭曲线上的积分都为零. 事实上, 即使没有原函数这一条件, 上述结论对解析函数也是成立的. 进一步, 我们还可以假设曲线 C 是更一般的曲线: 复围线.

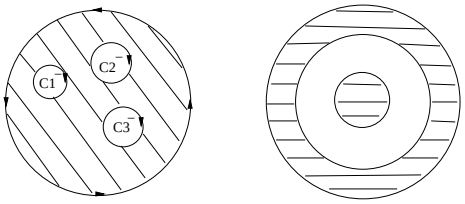
定义 2.3.1　复围线

$$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$$

是由一些互不相交的简单闭曲线 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 构成 (C_i^- 表示相应的反向曲线). 这些简单闭曲线满足以下条件

(1) $C_1, \cdots, C_n$ 均含于 C_0 的内部,

(2) $C_1, \cdots, C_n$ 两两互不包含. 特别地, C 围成一个有界区域 $\mathscr{D}$ 恰好以 C 为正向边界.



如果复围线仅由一条简单闭曲线 C_0 构成, 我们就说它所围的区域是单连通的, 也就是说 C_0 的内部区域里面没有"洞眼".

定理 2.3.1 (**柯西积分定理**)　设 $\mathscr{D}$ 由复围线 C 围成的区域, $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 并且在闭域 $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 上连续, 则有

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

证明　我们这里只考虑特殊情形, 要求导函数 $f'(z)$ 也在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续. 回顾式 (2-5),

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy.$$

由于 C 是复围线, 我们可以使用格林公式

$$\begin{aligned} \textstyle\int_C udx - vdy &= \textstyle\iint_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy, \\ \textstyle\int_C vdx + udy &= \textstyle\iint_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy. \end{aligned}$$

进一步, 由柯西-黎曼条件, 上面两式右边均等于零. 这就推出 $\int_C f(z)dz = 0$. ■

结合注记 2.3.1, 我们有

推论 2.3.1　设 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 是复围线, $\mathscr{D}$ 是由 C 所围的区域, $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 并且在闭域 $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 上连续. 那么

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

推论 2.3.2　设 $\mathscr{D}$ 是单连通的, $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上解析, 那么存在原函数 $F(z)$, 使得

(1) $F'(z) = f(z)$,

(2) (牛顿-莱布尼兹公式)

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

等式左边的积分与路径选取无关.

证明 选取一点 $z_0 \in \mathscr{D}$. 我们定义

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi.$$

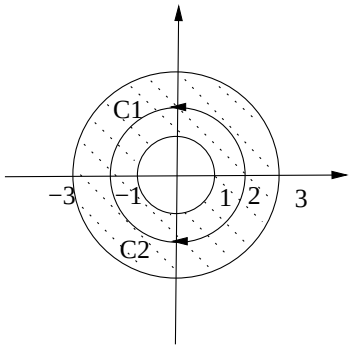
由柯西积分定理以及前面的讨论, 上述的积分不依赖于路径选取, 只和端点有关, 因而定义是合理的. 剩下的验证留给读者完成. ■

例 2.3.3 设 C 是连接 0 和 $i\pi$ 的直线段, 求积分 $\int_C \sin z dz$.

一种办法是按照变量替换公式直接求积分. 但如果我们注意到 $\sin z$ 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数, 那么上述积分显然与积分路径无关. 因此由推论 2.3.2 的牛顿莱布尼兹公式,

$$\int_C \sin z dz = (-\cos z)\Big|_0^{i\pi} = \cos 0 - \cos i\pi = 1 - \frac{1}{2}\left(e^{\pi} + e^{-\pi}\right).$$

例 2.3.4 如果区域 $\mathscr{D}$ 不是单连通的, 那么积分 $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ 往往和积分路径选取有关. 虽然我们也能定义"原函数", 但这样的原函数通常是多值函数. 比如设 $f(z) = \frac{1}{z}$ 定义在圆环 $H(0,1,3) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$ 上. 选取道路 $C_1 : z = 2e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]$ 及 $C_2 : z = 2e^{-i\theta}, \theta \in [0,\pi]$.



由直接的计算可知

$$\int_{C_1} f(z)dz = i\pi, \quad \int_{C_2} f(z)dz = -i\pi$$

$C = C_1 + C_2^-$ 是简单闭曲线, $\int_C f(z)dz = 2\pi i$. 如果我们用 $\ln z$ 作为 $\frac{1}{z}$ 的原函数. 那么 $\ln z = \int_1^z \frac{1}{\xi}d\xi$ 的值就不能由端点唯一确定. 当 z 分别沿着 C_1, C_2 从 1 走到 -1 时, $\ln z$ 的值恰好相差 $2\pi i$. ■

2.3.4 柯西积分公式

设 $\mathscr{D}$ 由复围线 C 围成的区域, $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 并且在闭域 $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 上连续. 利用柯西积分定理, 我们可以导出更一般的公式.

定理 2.3.2 (柯西积分公式) 设 $z_0 \in \mathscr{D}$, 那么我们有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

证明 我们考虑曲线

$$C_\varepsilon : |z - z_0| = \varepsilon.$$

注意到 $C' = C + C_\varepsilon^-$ 是复围线, 并且 $\frac{f(z)}{z-z_0}$ 在 C' 所谓区域内解析, 在其边界上连续, 故由推论 2.3.1 可知

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

因为 C_ε 也可写作参数形式 $z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$, 所以代入上述右边的积分, 并利用变量替换公式即得

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

注意到上式左边与 ε 无关, 所以两边取极限即得

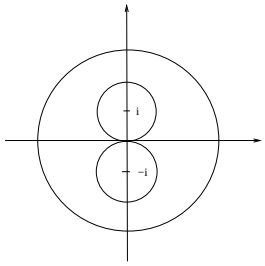
$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0) dz = 2\pi i f(z_0).$$

这就完成了证明. ■

注 2.3.2 (1) 柯西积分公式中的被积函数在 $\mathscr{D} - \{z_0\}$ 上是解析函数, 但是在 z_0 没定义. 由于 C 不经过 z_0, 所以积分还是有定义的.
(2) 柯西积分公式右边的积分只和 C 上的函数值有关, 但是左边却只和中心点 z_0 的函数值有关, 和曲线 C 上取值无关.
(3) 如将 $f(z) = (z - z_0)g(z)$ 代入柯西积分公式, 则立得柯西积分定理, 这里 $g(z)$ 是解析函数. ■

例 2.3.5 设 $C : |z - z_0| = r$. 对以下各 $f(z)$, 求积分 $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$.
(1) 设 $f(z) = 1$. 由柯西积分公式立得 $\int_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$.
(2) 设 $f(z) = z^n$. 此时 $\int_C \frac{z^n}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot z_0^n$. ■

例 2.3.6 对以下各曲线 C, 求积分 $\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$.



我们注意到, $\frac{1}{z^2+1}$ 除了在 $z = \pm i$ 外, 其他点上都是解析的.

(1) $C : |z + i| = 1$. 此时 $\frac{1}{z^2+1}$ 在 C 所围区域内部仅有 $z = -i$ 没定义. 由柯西积分公式, 我们有

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 1} dz = \int_C \frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)}{z + i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z - i}\right)\Big|_{z=-i} = -\pi.$$

我们也可以如下求解

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 1} dz = \frac{1}{2i} \int_C \left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i}\right) dz = \frac{1}{2i} \int_C \frac{1}{z - i} dz - \frac{1}{2i} \int_C \frac{1}{z + i} dz$$

注意到 $\frac{1}{z-i}$ 在 C 所围区域内部解析, 故由柯西积分定理得 $\int_C \frac{1}{z-i}dz = 0$. 另一方面, 又由柯西积分公式可得 $\int_C \frac{1}{z+i}dz = 2\pi i$. 代入上式右边后即得解答.

(2) $C : |z-i| = 1$. 此时$\frac{1}{z^2+1}$ 在 C 所围区域内部仅有 $z = i$ 没定义, 故有

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}dz = \int_C \frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)}{z-i}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{z+i}\right)\Big|_{z=i} = \pi.$$

(3) $C : |z| = 3$. 此时 $z = \pm i$ 均在 C 所围区域内. 我们取简单闭曲线

$$C_1 : |z-i| = \frac{1}{2}, \quad C_2 : |z+i| = \frac{1}{2}.$$

注意到在复围线 $C' = C + C_1^- + C_2^-$ 所谓的区域内, $\frac{1}{z^2+1}$ 是解析的, 因此由推论 2.3.1 得

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z^2+1}dz + \int_{C_2} \frac{1}{z^2+1}dz.$$

类似 (1)(2) 讨论即得 $\int_C \frac{1}{z^2+1}dz = 0$. ■

例 2.3.7 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 且 $z_1 \neq z_2$. 考虑曲线 $C : |z| = R$ $(R > \max\{|z_1|, |z_2|\})$. 我们求积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz.$$

与上例类似, 我们考虑小圆周 $C_k : |z-z_k| = \varepsilon$ $(k = 1, 2)$, 这里 ε 充分小. 因此有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\left(\frac{f(z)}{z-z_2}\right)}{(z-z_1)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\left(\frac{f(z)}{z-z_1}\right)}{(z-z_2)}dz = \frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}.$$

特别地, 如果我们让 z_2 趋向于 z_1, 那么上式两边取极限即得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)^2}dz = f'(z_1).$$

这是下一节柯西导数公式的特例. ■

2.3.5 柯西导数公式

我们要利用柯西积分公式进一步导出柯西导数公式, 它立刻推出定理2.2.1, 即解析函数具有任意阶导数.

定理 2.3.3 (柯西导数公式) 设 $\mathscr{D}$ 由复围线 C 围成的区域, $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 并且在闭域 $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 上连续. 设 $z_0 \in \mathscr{D}$, 我们有

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

证明 我们对 n 施归纳法. $n = 0$ 时, 这就是柯西积分公式. 不妨假设 $< n$ 情形已证. 由归纳假设,

$$f^{(n-1)}(z_0+\Delta z) - f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C f(z)\left(\frac{1}{(z-z_0-\Delta z)^n} - \frac{1}{(z-z_0)^n}\right)dz.$$

另一方面, 容易计算极限

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\left(\frac{1}{(z-z_0-\Delta z)^n} - \frac{1}{(z-z_0)^n}\right)}{\Delta z} = \frac{n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

这样就有

$$f^{(n)}(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f^{(n-1)}(z_0+\Delta z)-f^{(n-1)}(z_0)}{\Delta z}=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{n}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

整理后即得结论. ■

例 2.3.8 设 $C:|z|=1$. 求以下各积分.

(1) $\int_C \frac{e^z}{z^2}dz$. 利用柯西导数公式, 该积分等于 $2\pi i(e^z)'|_{z=0}=2\pi i$.

(2) $\int_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz$. 注意到 $z=2$ 并非单位圆盘内的无定义点, 因此我们可写为

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z-2)}dz=\int_C \frac{\left(\frac{e^z}{z-2}\right)}{z^2}dz=2\pi i\left(\frac{e^z}{z-2}\right)'|_{z=0}=-\frac{3\pi i}{2}.$$

2.4 复积分的应用

在上一节的基础上, 我们可以得到许许多多深刻且有趣味的结论. 这些结论在数学分析中往往是没有的, 原因就在于解析函数的解析条件 (柯西黎曼条件) 远远强于通常的实函数的可导条件.

2.4.1 柯西不等式

我们先做些准备工作. 对任何复积分, 从定义出发, 我们有以下简单不等式.

$$|\int_C f(z)dz|\le\int_C|f(z)||dz|\le\left(\max_{z\in C}|f(z)|\right)\cdot\int_C|dz|=\left(\max_{z\in C}|f(z)|\right)\cdot l(C),\qquad(2\text{-}7)$$

这里 $l(C)$ 是曲线 C 的长度.

定理 2.4.1 (**柯西不等式**) 设 $f(z)$ 在开圆盘 $|z-a|<R$ 内解析, 且在闭圆盘 $|z-a|\le R$ 上连续. 设 $M(R):=\max_{|z-a|=R}|f(z)|$. 那么

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!}{R^n}M(R).$$

证明 由不等式 (2-7), 我们得到

$$|f^{(n)}(a)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\right|\cdot\left|\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|\le\frac{n!}{2\pi}\cdot\max_{|z-a|=R}\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right|\cdot 2\pi R.$$

注意到

$$\max_{|z-a|=R}\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right|=\frac{M(R)}{R^{n+1}}.$$

由此立得结论. ■

2.4.2 刘维尔定理

设 $f(z)$ 是整个复平面 $\mathbb{C}$ 上的解析函数. 我们把这类函数称作整函数.

定理 2.4.2 (**刘维尔定理**) 如果 $f(z)$ 是有界整函数, 那么 $f(z)$ 必定是常值函数.

证明 假设 $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$, 这里 M 是常数. 任取一点 $z_0 \in \mathbb{C}$, 考虑圆周 C_R : $|z - z_0| = R$. 由柯西不等式得

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

注意到以上不等式左端与 R 无关. 我们让 R 趋向于无穷大, 则得 $|f'(z_0)| = 0$, 即 $f'(z_0) = 0$. 由 z_0 的任意性可知, $f'(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上恒为零, 即 $f(z)$ 是常值函数. ■

利用类似的方法, 这一结论也可以推广到以下的多项式情形. 我们留给读者证明.

命题 2.4.1 设 $f(z)$ 是整函数, $M(R) = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M(R)}{R^n} = 0$, 则 $f(z)$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式.

2.4.3 代数学基本定理证明

我们回顾一下高斯的代数学基本定理 1.4.1. 设

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

它断言 $f(z) = 0$ 恰有 n 个根 (允许相同). 为证明此定理, 我们只需要证明该方程至少有一个根. 这是因为, 若 $z = \alpha$ 是一个根, 那么由多项式带余数除法可知

$$f(z) = (z - \alpha) f_1(z),$$

这里 $f_1(z)$ 是次数 $n-1$ 的多项式. 这样, 我们可以对多项式次数施归纳法, 并由归纳假设可知 $f(z) = 0$ 恰好有 n 个根.

证明 (代数学基本定理) 反证法. 假设 $f(z) = 0$ 无根, 则 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处解析, 即为整函数. 注意到极限

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = \lim_{z\to\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right) = a_n \neq 0.$$

因此我们可取定充分大的 $R > 0$, 使得当 $|z| > R$ 时, $|\frac{f(z)}{z^n}| > c > 0$, 这里 c 是一个正常数. 这样,

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{z^n} \right| \cdot \frac{1}{\left| \frac{f(z)}{z^n} \right|} \leq \frac{1}{cR^n}, \quad |z| > R.$$

另一方面, 当 $|z| \leq R$ 时, 由 $|g(z)|$ 的连续性可知, 存在常数 M, 使得 $|g(z)| \leq M$, $|z| \leq R$. 综合可知

$$|g(z)| \leq \max\{\frac{1}{cR^n}, M\}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

是有界函数. 因此由刘维尔定理推知 $g(z)$ 是常值函数, 即 $f(z)$ 是常值函数, 矛盾! 故方程 $f(z) = 0$ 至少有一实根. ■

2.4.4 均值公式

我们假设 $f(z)$ 是开圆盘 $|z - a| < R$ 上的解析函数, 并且在 $|z - a| \leq R$ 上连续, 则由变量替换公式, 我们立刻得到以下结论.

命题 2.4.2 (均值公式) 设 $f = u + iv$ 满足以上诸条件, 则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta,$$

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + Re^{i\theta})d\theta,$$
$$v(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a + Re^{i\theta})d\theta.$$

这些公式的特点是, 左边只取决于 a 点处的函数值, 与半径 R 无关; 但右端积分却只和圆周上的点的函数值相关.

2.4.5 最大模原理

利用均值公式, 我们可以得到以下重要结论.

定理 2.4.3 (最大模原理) 设 $f(z)$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 并且不是常值函数. 设

$$M = \sup_{z\in\mathscr{D}} |f(z)|,$$

那么我们有严格的不等式 $f(z) < M$, $\forall z \in \mathscr{D}$. 这里 M 允许取 $+\infty$. 换言之, $|f(z)|$ 不可能在 $\mathscr{D}$ 内取到最大值.

证明 若 $M = +\infty$, 结论是平凡的. 今设 M 是有限数. 我们用反证法. 假设存在 $z_0 \in \mathscr{D}$, 使得 $|f(z_0)| = M$. 我们可以进一步要求 z_0 满足以下条件 (留给读者验证): 存在 z_0 的小邻域

$$B(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subseteq \mathscr{D},$$

使得边界圆周 $|z - z_0|$ 上至少有一点 z_1 满足 $|f(z_1)| < M$.

由均值公式, 我们有

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| d\theta,$$

从而

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| - M\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| d\theta - M \ge 0. \tag{2-8}$$

由于 (2-8) 左端的积分函数项恒有

$$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| - M \le 0,$$

因此这就迫使

$$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| \equiv M, \quad \forall\theta.$$

也就是说边界圆周 $|z - z_0|$ 上的点恒满足上式. 但由假设条件 $|f(z_1)| < M$, 矛盾! 综上, 我们得证结论. ■

推论 2.4.1 设 C 是有界 $\mathscr{D}$ 的边界, $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 是对应的闭域. 如果非常值函数 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内解析, 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续, 那么对任意 $z_0 \in \mathscr{D}$, 我们有严格不等式

$$|f(z_0)| < \sup_{z\in C} |f(z)| < +\infty.$$

证明 由于闭域$\overline{\mathscr{D}}$ 是有界的, 且 $f(z)$ 连续, 所以 $|f(z)|$ 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上必有最大值. 但由最大模原理, 取最大模值的点不可能在 $\mathscr{D}$ 内, 从而必定在边界 C 上. ■

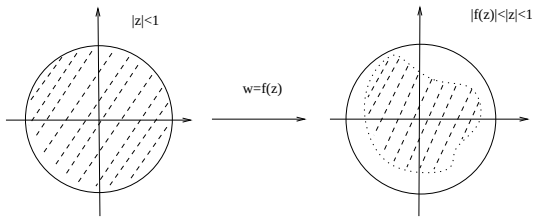
2.4.6 许瓦兹引理

在这一小节中, 我们讨论单位开圆盘 $B(0,1)=\{z\mid |z|<1\}$ 上的解析函数 $f(z)$, 并假设 $f(0)=0$ 及 $|f(z)|<1, \forall z\in B(0,1)$.

从几何图像上看, 满足这些条件的 $w=f(z)$, 相当于给出了单位开圆盘之间的映射, 使得像区域完全落在单位开圆盘内. 事实上, 它们还满足更精细的性质.

定理 2.4.4 (许瓦兹引理) 假设 $f(z)$ 满足以上各条件, 那么我们有

$$|f(z)|\le |z|<1.$$



进一步, 若存在某个 $z_0\in B(0,1)$, 使得 $|f(z_0)|=|z_0|$, 则 $f(z)=e^{i\theta}z$, 这里 $\theta\in\mathbb{R}$ 是给定常数.

证明 考虑函数

$$F(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z}, & z\neq 0,\\ f'(0), & z=0.\end{cases}$$

容易检验它是单位开圆盘上的解析函数, 且 $F'(0)=\frac{1}{2}f''(0)$.

今任取 $z_0\in B(0,1)$, 及正实数 r 使得 $|z_0|<r<1$. 由推论 2.4.1, 我们有

$$|F(z_0)|<\max_{|z|=r}|F(z)|=\max_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{r}\le\frac{1}{r},$$

从而 $|f(z_0)|\le\frac{|z_0|}{r}$. 让 r 趋向于 1, 我们就得到 $|f(z_0)|\le|z_0|$, 即 $|F(z_0)|=1$. 由 $|z_0|$ 选取的任意性, 即得许瓦兹不等式.

若存在 $|f(z_0)|=|z_0|$, 则 $|F(z_0)|=1$. 由最大模原理立知 $F(z)$ 是常值函数, 故可设 $F(z)=e^{i\theta}$, 即 $f(z)=e^{i\theta}z$. ■

2.5 级数

在处理完微积分的概念之后, 我们很自然地会按照数学分析的思路去研究幂级数理论. 这正是本章节的主要目的之一.

2.5.1 级数的基本性质

考虑区域 $\mathscr{D}$ 上的函数序列 $\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$. 我们将无穷项求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ 称作级数, 并设部分和

$$S_n(z):=\sum_{k=1}^{n}u_k(z).$$

数学分析中的很多概念都可以照搬过来.

(1) 如果对某个 $z=z_0$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z_0)$ 存在, 我们就说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(z_0)$ 在 $z=z_0$ 处收敛, 此时

z_0 称作收敛点; 否则就称发散. 所有收敛点的全体称作收敛域. 上述级数当然在其收敛域上收敛.
(2) 类似地, 如果以下级数收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z_0)|,$$

那么我们就说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 $z = z_0$ 处绝对收敛.
(3) 设 $E \subseteq \mathscr{D}$ 是某个子集, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $m > n > N$ 时总有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(z) \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in E,$$

我们就说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 E 上一致收敛.
(4) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内的任何闭域上都一致收敛, 我们就说它是内闭一致收敛 .

例 2.5.1 (1) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛域是单位开圆盘 $B(0,1) = \{z \mid |z| < 1\}$. 此时它收敛域函数 $\frac{1}{1-z}$.
(2) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 在整个复平面上绝对收敛. 这是因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = e^{|z|}.$$

我们将在后面证明它收敛于指数函数 e^z.
(3) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$ 仅在 $z = 0$ 收敛. ■

数学分析中关于一致收敛的性质也可以照搬过来.

命题 2.5.1 (1) (优级数条件) 假设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一组正实数序列, 满足 $|u_n(z)| \leq a_n$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ 一致收敛.
(2) (保连续性) 如果诸 $u_n(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的连续函数, 并且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上内闭一致收敛于函数 $S(z)$, 那么 $S(z)$ 是连续函数.
(3) (保积分性) 如果诸 $u_n(z)$ 是曲线 C 上的连续函数, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ 在 C 上一致收敛于 $S(z)$, 那么 $S(z)$ 在 C 上连续, 并且满足

$$\int_C S(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)dz.$$

(4) (保解析性, 亦称魏尔斯特拉斯定理) 如果诸 $u_n(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 并且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上内闭一致收敛于函数 $S(z)$, 那么 $S(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内解析, 并且对 l 阶导数有如下等式

$$S^{(l)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(l)}(z).$$

证明 (1)(2)(3) 及 (4) 的前半部分的证明与数学分析情形类似, 这里不再详细讨论. 今证

(4) 中等式. 由柯西导数公式及 (3), 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(l)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l!}{2\pi i} \int_C \frac{u_n(\xi)}{(\xi - z)^{l+1}} d\xi = \frac{l!}{2\pi i} \int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(\xi)}{(\xi - z)^{l+1}} \right) d\xi = \frac{l!}{2\pi i} \int_C \frac{S(\xi)}{(\xi - z)^{l+1}} d\xi.$$

上式右端显然等于 $S^{(l)}(z)$. ■

2.5.2 幂级数

与数学分析一样, 我们关心以下形式的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{2-9}$$

它称作幂级数. 类似数学分析情形, 我们有以下简单结论

引理 2.5.1 (1) 如果幂级数 (2-9) 在 $z = z_1$ 处收敛, 那么对任何满足 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ 的点 z, 该级数绝对收敛.
(2) 如果幂级数 (2-9) 在 $z = z_1$ 处发散, 那么对任何满足 $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ 的点 z, 该级数总发散.

证明 (1) 此时 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n(z - z_0)^n| = 0$, 因此存在常数 $M > 0$, 使得 $|a_n(z - z_0)^n| < M$ 对任何 n 成立. 这样，只要 $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, 我们就有

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n = \frac{M}{1 - \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|}.$$

由命题 2.5.1 (1) 即知绝对收敛性.

(2) 若存在收敛点 z 满足 $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$, 则由 (1) 立知 z_1 也收敛, 与假设条件矛盾! 故此时 z 必定发散.

推论 2.5.1 存在收敛半径 $0 \leq R \leq +\infty$, 使得当 $|z - z_0| < R$ 时幂级数收敛; 当 $|z - z_0| > R$ 时, 幂级数发散. 进一步, R 可以按以下方式计算 (如果极限存在的话)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

特别地, 幂级数在收敛域 $|z - z_0| < R$ 中是内闭一致收敛的.

定理 2.5.1 (泰勒展开) 设 $f(z)$ 在 $B(z_0, R) = \{z \mid |z - z_0| < R\}$ 内解析, 那么它可以展开成幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

此处系数

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi. \tag{2-10}$$

与圆周 $C_\rho : |z - z_0| = \rho$ 的半径无关.

证明 $f(z)$ 展开成幂级数的讨论与数学分析类似, 这里不再赘述. 系数的积分表达式直接来自于柯西导数公式. ■

复解析函数的泰勒展开与数学分形情形完全一样, 这一事实并非显而易见.

推论 2.5.2 设 $z_0 \in \mathbb{R}$. 假设 $f(z)$ 在 $B(z_0, r)$ 内解析, 并且对任何实数 $x \in B(z_0, r)$, $f(x)$ 总取实值. 那么 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的泰勒展开就是其限制在实数上的泰勒展开.

证明 考虑 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的泰勒展开

$$f(z) = \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n.$$

今取实数 $z \in B(z_0, r)$. 由命题条件, 我们有

$$f(z) = \overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \overline{(z - z_0)}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{R}.$$

由泰勒展开惟一性, 立知 $a_n = \bar{a}_n$ $(\forall n)$. 因此 $f(z)$ 的泰勒展开与实轴上的展开一致, 其系数都是实数. ■

例 2.5.2 这里仅举几例常见的幂级数展开式.

(1) $\sin z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

(2) $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$,

(3) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(4) $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$. ■

对式 (2-10) 应用柯西积分不等式, 我们立得以下结论.

推论 2.5.3 幂级数 (2-9) 中的诸系数满足以下不等式

$$|a_n| \leq \frac{\max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|}{\rho^n}.$$

2.5.3 欧拉定理证明

在第 1.3.3 我们引入了欧拉的指数表达式, 并由此引入了著名的欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta. \tag{2-11}$$

但是欧拉为什么要引入如此不自然的指数表达式呢? 事实上, 欧拉是先通过幂级数定义了指数函数, 然后才发现指数公式的.

首先我们直接将例 2.5.2 (3) 作为指数函数的定义, 即规定

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

由于该级数对任何复数 z 都绝对收敛, 因此这样定义的指数函数处处有定义.

现在我们将 $z = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) 代入上式, 即得

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m-1}}{(2m-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}\theta^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

注意上式右端第一项是 $\cos\theta$ 的泰勒展开, 第二项是 $\sin\theta$ 泰勒展开, 由此即得欧拉公式 (2-11).

2.5.4 零点孤立性定理

定义 2.5.1 设 $f(z)$ 在开圆盘 $B(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ 内解析且不恒为零. 如果

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0), \text{ 且 } f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

我们就称 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的 k 级零点.

显然, 在 k-级零点处, 我们有

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + a_{k+2}(z - z_0)^{k+2} + \cdots,$$

即

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

上式右端在收敛域内显然仍是解析函数, 我们记作 $g(z)$. 由于 $a_k \neq 0$, 所以 $g(z_0) \neq 0$. 因此我们有以下结论.

引理 2.5.2 设 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处解析, 那么 $z = z_0$ 是 k 级零点当且仅当 $f(z)$ 可以写为

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

这里 $g(z)$ 在 $z = z_0$ 处解析, 且 $g(z_0) \neq 0$.

定理 2.5.2 (**零点孤立性定理**) 设 $f(z)$ 在开圆盘 $B(z_0, r)$ 内解析且不恒为零. 如果 $z = z_0$ 是其零点, 那么必存在 $\rho < r$, 使得 $f(z)$ 在开圆盘 $B(z_0, \rho) = \{z \mid |z - z_0| < \rho\}$ 内仅有唯一的零点 $z = z_0$.

证明 注意到 $f(z)$ 不恒为零, 故由引理 2.5.2, 我们可以写 $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$. 由于 $g(z)$ 解析且 $g(z_0) \neq 0$, 故存在小邻域 $B(z_0, \rho)$, 使得 $g(z)$ 在该邻域内处处不为零. 因此 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 在该邻域内的唯一零点. ■

例 2.5.3 如果没有解析条件, 零点孤立性定理是不对的. 比如在实函数情形, 我们取

$$f(x) = \begin{cases} x^k \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \qquad\quad & x = 0. \end{cases}$$

它在 $x = 0$ 处有直至 $k - 1$ 阶的导数 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$. 但是 $x = 0$ 并非孤立零点, 因为我们有零点序列 $x_k = \frac{1}{n\pi}$ ($n = 1, 2\cdots$) 趋向于 $x = 0$. ■

推论 2.5.4 设 $f(z)$ 在开圆盘 $B(z_0, r)$ 内解析. 设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是开圆盘 $B(z_0, r)$ 内的点列, 满足

(1) $f(z_n) = 0$, $\forall n$.

(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个聚点落在 $B(z_0, r)$ 内,

那么 $f(z)$ 恒为零.

证明 不失一般性, 我们可以假设 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in B(z_0, r)$. 由 $f(z)$ 的连续性可知 $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. 因而 a 显然不是孤立零点. 这样, 由零点孤立性定理立得结论. ■

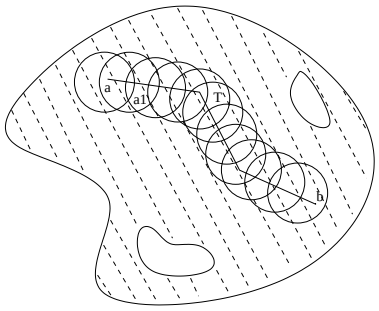
2.5.5 刚性定理

零点孤立性定理看似平凡, 实际上可以推出以下的重要结论—解析函数刚性定理. 后者保证了解析延拓的惟一性.

定理 2.5.3 (刚性定理) 设 $f(z), g(z)$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 如果存在 $\mathscr{D}$ 内的点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足
(1) $f(z_n) = g(z_n)$, $\forall n$.
(2) $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一个聚点落在 $\mathscr{D}$ 内,
那么 $f(z) \equiv g(z)$, $\forall z \in \mathscr{D}$.

证明 不失一般性, 我们可以假设 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in \mathscr{D}$. 令 $h(z) = f(z) - g(z)$. 由命题假设条件, $h(z_n) = 0$, $\forall n$. 因此由连续性可知 $h(a) = 0$.

任取 $\mathscr{D}$ 中一点 b, 我们只需要证明 $h(b) = 0$ 即可. 今在 $\mathscr{D}$ 内取一条折线 T 连接 a 和 b. 我们在 T 内插入点列 $a = a_0, a_1, \cdots, a_n = b$. 以每个点 a_i 为圆心, 作半径为 ρ 的圆盘 D_i. 只要点列取的足够密, 半径 ρ 足够小, 我们总是可以假设
(1) 所有圆盘 $B(a_i, \rho)$ 落在 $\mathscr{D}$ 内,
(2) $|a_{i-1} - a_i| < \rho$, 即 $a_{i-1} \in B(a_i, \rho)$, $\forall i$.



由推论 2.5.4 可知 $h(z)$ 在 D_0 上恒为零. 注意到 $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ 且 $h(z)$ 在其上恒为零, 从而再次由推论 2.5.4 推知 $h(z)$ 在 D_1 上恒为零. 依此类推, 我们可以证明 $h(z)$ 在 D_n 上恒为零, 因而 $h(b) = 0$. 这样, 由 b 的任意性即得结论. ■

推论 2.5.5 设 $f(z), g(z)$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 并且 $\mathscr{D}$ 包含实数轴上的某个开区间 (a, b). 如果 $f(x) \equiv g(x)$, $\forall x \in (a, b)$, 那么在整个区域 $\mathscr{D}$ 内也恒有 $f(z) \equiv g(z)$.

例 2.5.4 利用上述推论, 我们很容易证明诸三角函数公式在复数情形也成立. 比如倍角公式

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

当然, 读者也可以按照定义直接验证, 但这样一来计算量就会增加. ■

例 2.5.5 刚性定理中 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有聚点在区域 $\mathscr{D}$ 内这一条件不能去掉, 否则结论不一定成立. 比如取 $f(z) = \sin z$, $g(z) = 0$. 尽管在点列 $\{n\pi\}_{n=1}^{\infty}$ 上恒有 $f(n\pi) = g(n\pi)$, 但是这两个函数并不相同. ■

2.5.6 双边幂级数

圆盘上的解析函数可展开成幂级数. 那么圆环上的解析函数是否也能展开成幂级数呢? 这通常是做不到的. 比如 $f(z)=\frac{1}{z}$, 在圆环 $H(0,0,1)=\{z\mid 0<|z|<1\}$ 上不能写成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 幂级数, 否则当 z 趋向于零时, 幂级数应当趋向于有限值, 但对 $\frac{1}{z}$ 来说这显然是不可能的. 为此, 我们需要推广幂级数的概念.

定义 2.5.2 *双边幂级数是指如下形式的级数*

$$\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots \tag{2-12}$$

有时我们将双边幂级数 (2-12) 分解成两部分

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{m=1}^{\infty}c_{-m}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^m.$$

上式右端第一项称作 $z=z_0$ 的正则部分, 第二项称作 $z=z_0$ 的主要部分. 由幂级数的理论, 正则部分在某个收敛域 $|z-z_0|<R$ 中内闭一致收敛; 而主要部分作为 $\frac{1}{z-z_0}$ 的幂级数, 在某个收敛域 $\left|\frac{1}{z-z_0}\right|<\frac{1}{r}$ 中内闭一致收敛, 即在 $|z-z_0|>r$ 中一致收敛. 这样, 双边幂级数 (2-12) 在圆环

$$H(z_0,r,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid r<|z-z_0|<R\}$$

中内闭一致收敛. 很显然, 这里隐含了一个条件, 即 $r<R$.

反过来, 上述圆环内的解析函数也可以展开成双边幂级数.

定理 2.5.4 (**罗朗展开**) *在圆环 $H(z_0,r,R)$ 内的解析函数 $f(z)$ 可展开为双边幂级数*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

诸系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\quad n\in\mathbb{Z},$$

这里 $C_\rho:|z-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$.

我们这里省略该定理证明, 但是需要指出以下几点, 提醒读者注意.

注 2.5.1 (1) 由于函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 未必有定义, 所以 c_n 不能像通常的泰勒展开那样也写成 n 阶导数的表达式 $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$; 况且当 $n<0$ 时 n 阶导数也没有意义. 从这一点上也可以看出, 我们用积分来计算展开式系数要比用导数来计算更方便推广.

(2) 如果 $f(z)$ 在圆盘 $B(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<R\}$ 内解析, 那么其泰勒展开与罗朗展开一致—即主要部分为零. ■

例 2.5.6 (1) 双边幂级数

$$\frac{1}{z^k(1-z)}=\sum_{n=-k}^{\infty}z^n$$

在 $0<|z|<1$ 内绝对收敛. 其主要部分只有有限项, 因此对收敛性没有影响.

(2) 双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$$

处处发散. 这是因为其正则部分在 $|z|<1$ 内收敛; 而主要部分在 $|z|>1$ 内收敛. 因此对任何 $z\in\mathbb{C}$, 两者不可能同时收敛.

(3) $f(z)=e^z+e^{\frac{1}{z}}-1$ 的罗朗展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{|n|!}=\cdots+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots$$

在 $H(0,0,\infty)=\mathbb{C}-\{0\}$ 上绝对收敛. 正则部分就是 e^z 的泰勒展开, 主要部分则是将 $e^{\frac{1}{z}}-1$ 关于 $\frac{1}{z}$ 作泰勒展开. ■

例 2.5.7　将以下各圆环上的解析函数展开成罗朗级数.

(1) $f(z)=\frac{1}{z}$, $0<|z-1|<1$.

注意到 $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}$ 且 $|z-1|<1$, 因此对它关于 $z-1$ 作泰勒展开即得罗朗级数

$$\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

(2) $f(z)=\frac{1}{z}$, $1<|z-1|$.

注意到 $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1$, 我们有

$$\frac{1}{z}=\frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^n}$$

(3) $f(z)=\frac{1}{z(z^2+2)}$, $0<|z|<\sqrt{2}$.

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1+\frac{z^2}{2}}=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^{2n-1}.$$

(4) $f(z)=\frac{1}{z(z^2+2)}$, $\sqrt{2}<|z|$.

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z^2}}=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n}{z^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{2n+3}}.$$

2.5.7 傅里叶级数

数学分析中, 我们除了讨论幂级数之外还要研究傅里叶级数. 它实际上可以归结为某种双边幂级数. 考虑周期函数 $f(\theta)$ 的傅立叶级数展开

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right),\quad a_i,b_i,\theta\in\mathbb{R}.$$

由欧拉公式,

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\tfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left(\tfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}\right)+b_n\left(\tfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}\right)\right)\\&=\tfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{in\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-in\theta}\end{aligned}$$

令 $z=e^{i\theta}$,

$$c_n=\begin{cases}\frac{a_n-ib_n}{2}, & n>0,\\ \frac{a_0}{2}, & n=0,\\ \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}, & n<0.\end{cases}$$

我们就得到

$$f(\theta)=F(z):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n,\quad z=e^{i\theta}.$$

我们不考虑严格性, 仅仅从形式上推导傅立叶系数的计算公式. 由罗朗展开的系数公式, 我们有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{F(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)e^{-ni\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta.$$

由此立得

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta,\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta.\end{cases}$$

本章习题

加 $*$ 号的习题表示有一定难度.

习题 2.1 求以下函数 $w=f(z)$ 的解析区域.

(1) $f(z)=x^2+y^2+2xyi$,

(2) $f(z)=|x^2+y^2|+2|xy|i$.

习题 2.2 设 b 是开圆盘 $|z-a|<R$ 内任一点, $f(z)$ 在该圆盘上解析, 在闭圆盘 $|z-a|\le R$ 上连续, 那么

$$|f^{(n)}(b)|\le n!\cdot R\cdot\frac{M(R)}{(R-|b-a|)^{n+1}},$$

这里 $M(R)$ 定义同定理 2.4.1.

习题 2.3 将以下各圆环上的解析函数展开成罗朗级数.

(1) $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$, $0<|z|<1$.

(2) $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$, $0<|z-i|<1$.

第三章　奇点与残数

设 $f(z)$ 是复变函数. 如果一个点 $z=z_0$ 不是 $f(z)$ 的解析点 (甚至可能没有定义), 并且 $f(z)$ 至少有一组解析点列收敛于 z_0, 那么我们就说 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的奇点.

本章的目标就是用双边幂级数这一有效工具研究来某些重要的奇点类型. 读者将会发现, 很多积分的计算值其实都是由这些奇点确定的. 这就是所谓的残数定理, 它是柯西积分定理的进一步推广. 因此我们可以认为, 研究奇点的目的之一就是为了计算积分.

3.1　奇点分类

3.1.1　孤立奇点

定义 3.1.1　假设 $f(z)$ 在奇点 $z=z_0$ 的某个空心小邻域 $0<|z-z_0|<r$ 内解析, 我们就称 $z=z_0$ 是孤立奇点

假设 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么由罗朗展开, 我们有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \tag{3-1}$$

让我们回顾以下概念. 上述级数 (3-1) 的主要部分是指

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k},$$

正则部分是指

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

定义 3.1.2　设 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

(1) 如果 (3-1) 的主要部分等于零, 我们就称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点,

(2) 如果 (3-1) 的主要部分由有限项组成

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k},$$

我们就称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 级级点,

(3) 如果 (3-1) 的主要部分由无限项组成, 我们就称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的本性奇点.

例 3.1.1　(1) $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$ 在 $z=0$ 处的罗朗展开 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$, 显然没有主要部分. 因此 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 处的罗朗展开 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$, 没有主要部分, 因而是 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

(3) $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6z}+\frac{z}{120}+\cdots$, 因此主要部分为 $\frac{1}{z^3}-\frac{1}{6z}$, 故 $z=0$ 是三级极点. (4)

$f(z)=e^{\frac{1}{z}}+e^{z}-1$ 在 $z=0$ 处的罗朗展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{|n|!}$$

的主要部分有无限项, 因此 $z=0$ 是本性奇点.

(5) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$ 在 $z=0$ 处的罗朗展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{2n}}.$$

的主要部分有无限项, 因此 $z=0$ 是本性奇点. ■

利用双边幂级数, 我们很容易得到各类孤立奇点的判别方法.

命题 3.1.1 设 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则以下各条件等价:

(1) $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点;

(2) 极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在;

(3) $|f(z)|$ 在 z_0 的某个小邻域 $B(z_0,\rho)=\{z\mid |z-z_0|<\rho\}$ 内是有界函数.

上述条件之一成立时, 函数

$$F(z)=\begin{cases} f(z), & z\neq z_0,\\ \lim\limits_{z\to z_0}f(z), & z=z_0.\end{cases}$$

在 $z=z_0$ 处解析.

例 3.1.2 设 $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$. 此时可算出极限 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=1$, 因此 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

类似地, 也可用此法判断 $z=0$ 是 $g(z)=\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点. ■

命题 3.1.2 设 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则以下各条件等价:

(1) $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点;

(2) 极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)^m$ 存在且不为零;

(3) $\frac{1}{f(z)}$ 在 $z=z_0$ 处处解析, 且有 m 级零点.

上述条件之一成立时, 函数

$$\varphi(z)=\begin{cases} f(z)(z-z_0)^m, & z\neq z_0,\\ \lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)^m, & z=z_0.\end{cases}$$

在 $z=z_0$ 处解析, 并且 $\varphi(z_0)\neq 0$.

如果我们只需要判定奇点是否为极点, 而不关心极点级数的话, 下面的推论提供了更便捷的判定条件.

推论 3.1.1 设 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $z=z_0$ 是极点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$, 亦即 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$.

结合命题 3.1.1 与推论 3.1.1, 我们立刻得到本性奇点的判定条件.

推论 3.1.2　设 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $z=z_0$ 是本性奇点的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在.

例 3.1.3　设 $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$. 因为 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z^3}=\infty$, 所以 $z=0$ 是极点. 注意到 $\lim\limits_{z\to 0} z^3 f(z)=1\neq 0$, 所以 $z=0$ 是 3 级极点. ■

例 3.1.4　(1) 设 $f(z)=\sin\frac{1}{z}$. 用罗朗展开可以直接判断处 $z=0$ 是本性奇点. 但我们也可以用推论 3.1.2 来判断. 考虑点列 $z_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ $(n=1,2\cdots)$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$, 但 $\sin\frac{1}{z_n}=(-1)^n$. 因而极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在.

(2) $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ 在 $z=0$ 是本性奇点. 你既可以用罗朗展开直接看出也可以通过验证其极限不存在来说明之. 事实上, 当 z 沿着实数轴趋向于 0 时, $f(z)$ 趋于 0. 但当 z 沿着虚轴趋向于 0 时, $f(z)$ 趋向于 ∞. 因而 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

(3) $f(z)=e^z+e^{\frac{1}{z}}-1$. 当 z 沿着正实轴向于 0 时, $f(z)$ 趋于 ∞; 当 z 沿着负实轴趋向于 0 时, $f(z)$ 趋于 0. 因此 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在, 故 $z=0$ 是其本性奇点. ■

关于本性奇点, 我们有以下著名结论.

定理 3.1.1 (Picard **定理**)　设 $f(z)$ 在圆环 $H(a,0,r)$ 上解析, 且 $z=a$ 是本性奇点, 那么最多除去一个例外值, 对任何复数 $A\in\mathbb{C}$, 方程

$$f(z)=A$$

总有无限个解, 并且 a 是这些解的聚点.

例 3.1.5　设 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. $z=0$ 是它的本性奇点. 对任何非零复数 A, 方程 $e^{\frac{1}{z}}=A$ 有可列个解

$$z=\frac{1}{\ln A}=\frac{1}{\ln|A|+i(\arg A+2k\pi)},$$

且显然趋向于 $z=0$. 但对 $A=0$ 而言, $e^{\frac{1}{z}}=0$ 无解. ■

3.1.2　无穷远点

$z=\infty$ 通常也是函数 $f(z)$ 奇点. 我们可以类似定义 $z=\infty$ 的奇点类型. 首先设 $w=\frac{1}{z}$, 我们构造函数

$$F(w):=f(\frac{1}{w})=f(z).$$

显然 $z=\infty$ 对应 $w=0$.

定义 3.1.3　$z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点 (相应地, 可去奇点、m 级极点、本性奇点), 如果 $w=0$ 是 $F(w)$ 的孤立奇点 (相应地, 可去奇点、m 级极点、本性奇点).

以下我们考虑 $z=\infty$ 是孤立奇点情形 (即 $w=0$ 是 $F(w)$ 的孤立奇点). 由定义, $F(w)$ 在圆环 $H(0,0,\frac{1}{r})=\{0\mid 0<|w|<\frac{1}{r}\}$ 内可以展开成罗朗级数

$$F(w)=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n w^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{-m}}{w^m}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n.$$

我们曾经将上式右端第一部分称作主要部分, 第二部分称作正则部分. 对应地, $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的罗朗展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{c_n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}=\sum_{m=1}^{\infty}c_nz^m+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}.$$

因此我们也称上式右端第一部分为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的主要部分, 第二部分称作正则部分. 这正好和有限点上的展开情形相反.

类似地, 我们可以通过以下方法判断孤立奇点类型.

引理 3.1.1 (1) $z=\infty$ 是可去奇点当且仅当极限 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 存在;
(2) $z=\infty$ 是 m 级极点当且仅当极限 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^m}$ 存在且非零; 也当且仅当 $z=\infty$ 是 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点;
(3) $z=\infty$ 是本性奇点当且仅当极限 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 不存在也不等于 ∞.

推论 3.1.3 $z=\infty$ 是极点当且仅当 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

例 3.1.6 (1) 设 $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$. 注意到

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}=1,$$

所以 $z=\infty$ 是一级极点.
(2) 设 $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$. 因为 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=1$, 所以 $z=\infty$ 是其可去奇点.
(3) 设 $f(z)=e^z+e^{\frac{1}{z}}-1$. 当 z 沿着正实轴向于 $+\infty$ 时, $f(z)$ 趋于 ∞; 当 z 沿着负实轴趋向于 $-\infty$ 时, $f(z)$ 趋于 0. 因而极限 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 不存在. 这就说明 $z=\infty$ 是它的本性奇点. ■

例 3.1.7 考虑有理函数

$$f(z)=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0},\quad a_nb_m\neq 0.$$

(1) 如果 $n=m$, 那么由 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\frac{a_n}{b_m}$ 可知 $z=\infty$ 是可去奇点.
(2) 如果 $n<m$, 那么 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$, 因而 $z=\infty$ 仍是可去奇点.
(3) 如果 $n>m$, 那么 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^{n-m}}=\frac{a_n}{b_m}$, 因而 $z=\infty$ 是 $n-m$ 级极点. ■

3.1.3 非孤立奇点

非孤立奇点是比较难于研究的, 因为此时我们没有罗朗展开这类有效工具. 这里仅举一些包含非孤立奇点的例子.

例 3.1.8 设 $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$. 求出所有奇点并指出它们的奇点类型. 我们先列出所有可能的奇点:

$$z=\infty,\quad 0,\quad \frac{1}{k\pi}\quad (k\in\mathbb{Z}-\{0\}).$$

(1) 由例 3.1.6, 我们已知 $z=\infty$ 是一级极点.
(2) $z_k=\frac{1}{k\pi}$ 是孤立奇点. 由于

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)=\frac{(-1)^{k-1}}{k^2\pi^2},$$

所以 $z=z_k$ 是一级极点.
(3) 注意到 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=0$, 所以 $z=0$ 是非孤立奇点. ■

例 3.1.9 设 $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$. 求出所有奇点并指出它们的奇点类型. 我们先列出所有可能的奇点:

$$z=\infty,\quad 0,\quad 2k\pi i\quad (k\in\mathbb{Z}-\{0\}).$$

(1) $z=0$ 是可去奇点,

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1+z-e^z}{z(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{6}-\cdots}{z(z+\frac{z^2}{2}+\cdots)}=-\frac{1}{2}.$$

(2) $z_k=2k\pi i$ 是孤立奇点. 由于

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)}{e^z-1}=1,$$

所以 $z=z_k$ 是一级极点.
(3) 注意到 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=\infty$, 所以 $z=\infty$ 是非孤立奇点. ■

3.2 残数

3.2.1 有限奇点的残数

设 $f(z)$ 是 $0<|z-z_0|<r$ 上的解析函数, $z=z_0$ 是其孤立奇点. 考虑罗朗展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{3-2}$$

这里系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\qquad C_\rho:|z-z_0|=\rho\quad (0<\rho<r).$$

我们特别关心项 $\frac{1}{z}$ 前的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(\xi)d\xi.$$

我们把 c_{-1} 称作 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处的*残数* (Residue), 记作 $\mathrm{Res}(f(z),z_0)$. 有时按照以前的习惯, 我们也将它称作*留数*. 由定义, 我们有

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(\xi)d\xi.$$

一个自然的问题是, 为什么我们只关心罗朗展式中的系数 c_{-1} 而不关心其他系数呢? 我们早先在研究牛顿莱布尼兹公式时发现, 为了使这一公式成立, 必须要保证柯西积分定理成立, 即

$$\int_{C_\rho} f(z)dz=0.$$

这里显然要求 $f(z)$ 是解析的. 如果 $f(z)$ 有孤立奇点 $z=z_0$, 那么这个结论一般是不成立的. 此时, 人们自然需要知道 $\int_{C_\rho} f(z)dz$ 具体是多少, 也就是要计算残数 $\mathrm{Res}(f(z),z_0)$ 的值.

那么为何我们将这个积分称作“残数”呢? 让我们对罗朗展开式 (3-2) 两边求积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi i}\int_{C_\rho}(z-z_0)^n dz. \tag{3-3}$$

让我们计算式 (3-3) 右端各积分.

(1) 当 $n \geq 0$ 时, 积分项是解析函数, 因此由柯西积分定理立得 $\int_{C_\rho}(z-z_0)^n dz = 0$.

(2) 当 $n < -1$ 时, 由柯西导数公式得 $\int_{C_\rho}(z-z_0)^n dz = \int_{C_\rho}\frac{1}{(z-z_0)^{-n}}dz = 0$.

(3) 当 $n = -1$ 时, 由柯西积分公式得 $\int_{C_\rho}\frac{1}{(z-z_0)}dz = 2\pi i$. 因此式 (3-3) 简化为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} f(z)dz = c_{-1}.$$

这就是说在计算上述积分过程中, 其他系数对应的项的积分值都消失了, 只剩下系数 c_{-1}, 即它是“残留”之数.

例 3.2.1　如果 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么 $f(z)$ 的罗朗展式就是泰勒展示

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

因而 $\mathrm{Res}(f(z), z_0) = c_{-1} = 0$. ■

如果 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 我们可以将 $f(z)$ 写成

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \quad g(z_0) \neq 0,$$

这里 $g(z)$ 在 $z = z_0$ 处解析. 将 $g(z)$ 作泰勒展开

$$g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_{m-1}(z-z_0)^{m-1} + a_m(z-z_0)^m + \cdots.$$

这样就有

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{(z-z_0)} + a_m + \cdots$$

因此我们得到

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = a_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{g(\xi)}{(\xi-z_0)^m}d\xi.$$

特别地, 我们有

推论 3.2.1　*如果 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 的一级极点, 那么*

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = g(z_0),$$

这里 $g(z) = (z-z_0)f(z)$ 在 $z = z_0$ 处解析且 $g(z_0) \neq 0$.

例 3.2.2　(1) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ 在 $z = 0$ 处有一级极点. 由推论 3.2.1,

$$\mathrm{Res}(f(z), 0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = 1.$$

(2) $f(z) = \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$ 在 $z = 2k\pi i$ $(k \neq 0)$ 处有一极极点 (见例 3.1.9). 推论 3.2.1 推出

$$\mathrm{Res}(f(z), 2k\pi i) = \lim_{z\to 2k\pi i}(z-2k\pi i)f(z) = 1.$$

但是 $z=0$ 是可去奇点, 因而 $\mathrm{Res}(f(z),0)=0$.
(3) $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$在 $z=0$ 处有三级极点(3.1.3), 由泰勒展式 $\sin z = z-\frac{z^3}{6}+\cdots$, 可知 $\mathrm{Res}(f(z),0)=-\frac{1}{6}$. ■

3.2.2 无穷远点的残数

设 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点. 考虑其罗朗展开

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad r<|z|<\infty.$$

我们定义 $z=\infty$ 处的残数

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty):=-c_{-1}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} f(z)dz,$$

这里 $C_R:|z|=R$ $(r<R<+\infty)$.

注 3.2.1 如果 $z=\infty$ 是可去奇点, 那么 $c_n=0$ $(\forall n\geq 0)$. 但这并不意味着 c_{-1} 必须等于零, 因而可去奇点的残数有可能非零! 这是和有限可去奇点的情形不同的. ■

前面我们讨论过 $z=\infty$ 如何通过反演变换归结为有限奇点的情形. 同样利用这一方法, 我们也可以把无穷远奇点的残数归结为有限奇点残数来计算. 设 $F(w)=f(\frac{1}{w})$, 考虑 $F(w)$ 在 $w=0$ 处的罗朗展开

$$F(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{w^n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m}w^m.$$

如果考虑 C_R 的逆时针定向, 那么它在反演变换 $w=\frac{1}{z}$ 下变成围绕原点的顺时针定向圆周 $C_{1/R}^-$. 由变量替换可得

$$\int_{C_R} f(z)dz=\int_{C_{1/R}^-} F(w)d\left(\frac{1}{w}\right)=-\int_{C_{1/R}} F(w)d\left(\frac{1}{w}\right)=\int_{C_{1/R}}\frac{F(w)}{w^2}dw.$$

因此我们也有

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty)=-\mathrm{Res}(\frac{F(w)}{w^2},0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1/R}}\frac{F(w)}{w^2}dw.$$

例 3.2.3 (1) $z=\infty$ 是 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 是可去奇点, 我们有罗朗展开

$$f(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots$$

因而 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-1$.

(2) $z=\infty$ 是 $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 是一级极点. 设 $w=\frac{1}{z}$ 及 $F(w)=\frac{1}{\sin w}$. 此时

$$F(w)=\frac{1}{\sin w}=\frac{1}{w}+\frac{w}{6}+\cdots,$$

因此 $\frac{F(w)}{w^2}=\frac{1}{w^3}+\frac{1}{6w}+\cdots$. 这就推出

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}(\frac{F(w)}{w^2},0)=-\frac{1}{6}.$$

(3) $z=\infty$ 是 $f(z)=\frac{e^z}{z^n}$ 是本性奇点. 由罗朗展开直接得 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{(n-1)!}$.

(4) 考虑分式线性函数 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. 当 $c\neq 0$ 时, $z=\infty$ 是可去奇点. 此时设 $w=\frac{1}{z}$ 及 $F(w)=f(\frac{1}{w})=\frac{a+bw}{c+dw}$. 我们有罗朗展开

$$F(w)=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c^2}w+\cdots$$

因而 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-\mathrm{Res}(\frac{F(w)}{w^2},0)=\frac{ad-bc}{c^2}$.

当 $c=0$ 时, $f(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$. 此时 $z=\infty$ 是一级极点, 其残数 $\mathrm{Res}(f,\infty)=0$. ■

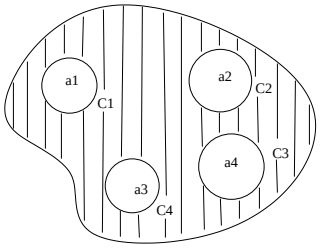
3.3 残数定理

3.3.1 有界区域残数定理

定理 3.3.1 (残数定理) 设 $\mathscr{D}$ 是由复围线 C 围成的有界区域, $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 中除有限个奇点 $a_1,\cdots,a_n$ 外处处解析, 在 $\overline{\mathscr{D}}=\mathscr{D}+C$ 上连续, 那么诸点 $z=a_i$ 皆孤立奇点, 且有以下等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),a_k).$$

证明 取充分小的圆周 $C_k:|z-a_k|=\varepsilon\ (k=1,2,\cdots,n)$, 使得诸 C_k 所围小圆盘皆落在 $\mathscr{D}$ 中. 挖掉这些小圆盘后, 我们得到一个新区域 D', 其边界恰好是复围线 $T:=C_1^-+\cdots+C_n^-+C$.



由于 $f(z)$ 在 D' 中解析, 在 $\overline{D}'=D+T$ 上连续, 因而由柯西积分定理可知 $\int_T f(z)=0$, 即

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\cdots+\int_{C_n}f(z)dz.$$

这样, 由残数的定义, 上式右边等于 $2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k)$, 故得结论. ■

推论 3.3.1 如果$f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 中除有限个可去奇点外处处解析, 且连续到边界, 那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=0.$$

特别地, 当 $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 内解析函数时, 即为柯西积分定理.

证明 注意可去奇点的残数皆为零, 故由残数定理立得结论. ■

推论 3.3.2 残数定理蕴含柯西积 (积分) 导数公式.

证明 设 $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 内解析函数, $a\in\mathscr{D}$. C_ε :是充分小圆周, 落在 $\mathscr{D}$ 内. 设 $F(z)=\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$. 由前面讨论, $F(z)$ 的残数

$$\mathrm{Res}(F(z),a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

由此及残数定理, 立得导数公式. ■

例 3.3.1　(1) 求积分 $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}dz$.

$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 在圆盘 $|z|<1$ 内的奇点仅有 $z=0$. 它是本性奇点, 残数 $\mathrm{Res}(f,0)=1$. 由残数定理,

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f,0) = 2\pi i.$$

(2) 求积分 $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1}dz$.

$f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ 在圆盘 $|z|<1$ 内的奇点仅有 $z=1$. 它是一级极点, 残数 $\mathrm{Res}(f,1)=\frac{1}{2}$. 由残数定理,

$$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1}dz = \pi i.$$

(3) 求积分 $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1}dz$. 此时 $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ 除了极点 $z=1$ 外还有一级极点 $z=-1$, 其残数为 $\mathrm{Res}(f,-1)=-\frac{1}{2}$. 由残数定理,

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,-1)\right) = 0.$$

(4) 求积分 $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz$. 此时 $f(z)=\frac{z^3}{z^4-1}$ 有四个一级极点 $z=-1,1,i,-i$, 它们的残数

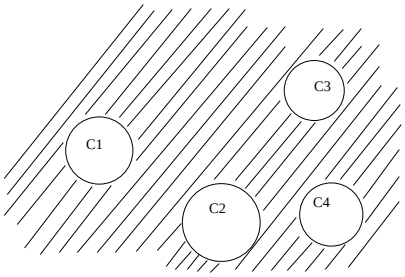
$$\mathrm{Res}(f,-1)=\mathrm{Res}(f,1)=\mathrm{Res}(f,i)=\mathrm{Res}(f,-i)=\frac{1}{4}.$$

从而由残数定理得

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz = 2\pi i.$$

3.3.2　无界区域残数定理

假设 C_k $(k=1,\cdots,n)$ 是互不相交的简单闭曲线, D_k 是 C_k 所围有界区域. 我们把平面挖掉所有 D_k 及边界 C_k 后所得区域记作 $\mathscr{D}$, 称作无界区域. 显然 $\mathscr{D}$ 包含 ∞, 其边界为 $C=C_1^-+\cdots+C_n^-$.



定理 3.3.2 (**无界区域残数定理**)　设 $f(z)$ 在无界区域 $\mathscr{D}$ 中除有限个奇点 $a_1,\cdots,a_n$ 及 ∞ 外处处解析, 在 $\overline{\mathscr{D}}=\mathscr{D}+C$ 上连续, 那么诸点 $z=a_i$ 及 ∞ 皆孤立奇点, 且有以下等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),a_k)+\mathrm{Res}(f(z),\infty).$$

证明　取充分大半径的圆周 $C_R:|z|=R$ 使得诸 a_k 及 $\mathscr{D}$ 的边界皆落在 C_R 所围区域内. C_R+C 构成复围线, 且围成有界区域. 由有界区域残数定理, 我们有

$$\int_{C_R} f(z)dz+\int_C f(z)dz = \int_{C+C_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),a_k).$$

另一方面, 由无穷远点残数的定义, $\int_{C_R} f(z)dz = -2\pi i \mathrm{Res}(f(z), \infty)$. 综合两式即得所需. ■

推论 3.3.3 (无界区域积分公式与导数公式) 设 $\mathscr{D}$ 是无界区域, C 是 $\mathscr{D}$ 的边界, $z_0 \in \mathscr{D}$. 设 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内解析, 且在 $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 上连续. 若 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么
(1) $f(z_0) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$;
(2) $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

证明 设 $F(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ $(n = 0, 1, \cdots)$. $F(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内有两个奇点 $z = z_0, \infty$. 由柯西积分公式或导数公式, 我们有

$$\mathrm{Res}(F(z), z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

另一方面, 由于 $z = \infty$ 是 $F(z)$ 的可去奇点, 因而其罗朗展开主要部分为零. 由残数定义, 这就推出

$$\mathrm{Res}(F(z), \infty) = \begin{cases} -f(\infty), & \text{if } n = 0, \\ 0, & \text{if } n \geq 1. \end{cases}$$

综合上面的残数计算以及无界区域残数定理, 即得结论. ■

例 3.3.2 求积分 $\int_C \frac{\cos\frac{1}{z}}{z-2}dz$, 这里 $C : |z| = 1$.

在无界区域 $|z| > 1$ 上, $z = \infty$ 是 $f(z) := \cos\frac{1}{z}$ 的可去奇点, $f(z)$ 在其他点上都是解析的. 注意到 C^- 是无界区域 $|z| > 1$ 的边界. 因此由上述推论即得

$$\int_C \frac{\cos\frac{1}{z}}{z-2}dz = -\int_{C^-} \frac{\cos\frac{1}{z}}{z-2}dz = -2\pi i(f(2) - f(\infty)) = 2\pi i\left(1 - \cos\frac{1}{2}\right).$$

读者可能会问, 我们是否可以在有界区域 $|z| < 1$ 内利用柯西积分 (导数) 公式来求上述积分呢?答案是否定的. 这是因为在 $|z| < 1$ 内, $z = 0$ 是 $\frac{\cos\frac{1}{z}}{z-2}$ 的本性奇点, 而柯西积分 (导数) 公式中的积分函数的奇点只能是极点.

尽管如此, 我们却可以用有界区域 $|z| < 1$ 内残数定理来求解, 即

$$\int_C \frac{\cos\frac{1}{z}}{z-2}dz = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{\cos\frac{1}{z}}{z-2}, 0\right).$$

然而求解上述残数并非易事, 这是因为 $z = 0$ 是本性奇点. 注意到

$$\frac{\cos\frac{1}{z}}{z-2} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}\right),$$

展开上式右端可直接算出残数

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\cos\frac{1}{z}}{z-2}, 0\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2^{2n-1}} = -\left(\cos\frac{1}{2} - 1\right).$$

由此可见用无界区域的残数定理计算这类积分更为简便. ■

例 3.3.3 求积分 $\int_C \frac{z^2\cos\frac{1}{z}}{(z^2-3)(z-3)}dz$, 这里 $C : |z| = 2$.

在无界区域 $|z| > 2$ 上, $z = \infty$ 是 $f(z) := \frac{z^2\cos\frac{1}{z}}{(z^2-3)}$ 的可去奇点且 $f(\infty) = 1$, $f(z)$ 在其他点上都是解析的.

注意到 C^- 是无界区域 $|z|>2$ 的边界. 因此

$$\int_C \frac{z^2\cos\frac{1}{z}}{(z^2-3)(z-3)}dz = -2\pi i(f(3)-f(\infty)) = \left(2-3\cos\frac{1}{3}\right)\pi i.$$

读者也可以尝试考虑用有界区域 $|z|<2$ 上的残数定理来求解. ■

例 3.3.4 求积分 $\int_C \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}dz$, 这里 $C:|z|=1$.

设 $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$. 由例 3.1.8, $z=0$ 是 $f(z)$ 的非孤立奇点. 因此我们不可能在有界区域 $|z|<1$ 内使用残数定理. 在无界区域 $|z|>1$ 上 (注意其边界是 C^-), 由例 3.2.3 (2), $f(z)$ 只有一级极点 $z=\infty$, 且残数 $\mathrm{Res}(f(z),\infty)=-\frac{1}{6}$. 由无界区域残数定理, 我们有

$$\int_C f(z)dz = -\int_{C^-}\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}dz = -2\pi i\mathrm{Res}(f(z),\infty) = \frac{\pi i}{3}.$$

3.4 残数总和定理

定理 3.4.1 (**残数总和定理**) 设 $f(z)$ 在扩充复平面 $\mathbb{C}$ 中除有限个奇点 $a_1,\cdots,a_n$ 及 ∞ 外处处解析, 那么诸点 $z=a_i$ 及 ∞ 皆孤立奇点, 且有以下等式

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),a_k)+\mathrm{Res}(f(z),\infty)=0.$$

证明 取充分大半径的圆周 $C:|z|=R$, 使得诸有限奇点 $z=a_k$ 均落在 C 所围圆盘内. 于是由残数定理得

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),a_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz.$$

另一方面, 由 $z=\infty$ 处残数定义,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = -\mathrm{Res}(f(z),\infty).$$

这就证明了结论. ■

利用残数总和定理, 我们可以简化很多积分的求解. 比如例 3.3.2 及例 3.3.2, 我们既可以用无界区域 $|z|>1$ 内的残数定理计算, 也可以用有界区域 $|z|<1$ 内的残数定理计算. 但是很显然, 两者的计算复杂度是不同.

例 3.4.1 (1) 求积分 $\int_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}dz$.

由残数定理以及残数总和定理,

$$\int_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\mathrm{Res}(e^{\frac{1}{z}},0) = -2\pi i\mathrm{Res}(e^{\frac{1}{z}},\infty) = 2\pi i.$$

(2) 求积分 $\int_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}dz$.

此时 $\frac{1}{z^2-1}$ 在 $|z-1|<1$ 内仅有奇点 $z=1$; 而在 $|z-1|>1$ 内则有奇点 $z=-1$ 及 $z=\infty$. 由残数定理以及残数总和定理, 我们有

$$\int_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}dz = 2\pi i\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2-1},1) = -2\pi i\left(\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2-1},\infty)+\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2-1},-1)\right) = \pi i.$$

例 3.4.2 求积分 $\int_{|z|=4}\frac{z^{13}}{(z-1)^2(z^4+2)^3}dz$.

设 $f(z)=\frac{z^{13}}{(z-1)^2(z^4+2)^3}$. 由残数定理以及残数总和定理, 我们有两种方式计算该积分, 即

$$\int_{|z|=4}f(z)dz=2\pi i\left(\mathrm{Res}(f(z),1)+\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}(f(z),2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{2k+1}{4}\pi i})\right)=-2\pi i\mathrm{Res}(f(z),\infty).$$

很显然, 利用最后的等式是最便捷的. 注意到 $z=\infty$ 是可去奇点, 且 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=1$, 所以残数 $\mathrm{Res}(f(z),\infty)=-1$. 这就立刻推出 $\int_{|z|=4}f(z)dz=2\pi i$.

当然, 我们也可以直接计算有界区域 $|z|<4$ 内的诸奇点留数, 但计算量是非常大的. ■

3.5 辐角原理

我们将在这一节研究如下积分

$$\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

如果不考虑多值性的问题, 仅仅从形式上看, 我们有

$$(\ln f(z))'=\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

因此我们将 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 称为对数导数.

3.5.1 对数导数的奇点与残数

假设 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<r$ 内解析, 且处处不为零. 为了计算残数

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f'(z)}{f(z)}dz,\quad \rho<r,$$

因此很自然地, 我们需要研究函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $z=a$ 处的奇点性态. 考虑以下两种情形:
(1) $z=a$ 是 $f(z)$ 的可去奇点或者解析点.

此时设 $z=a$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点 (若 $f(a)\neq 0$, 则规定 $m=0$), 我们有

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

这里 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 处解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$. 由直接计算可知

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m(z-a)^{m-1}\varphi(z)+(z-a)^m\varphi'(z)}{(z-a)^m\varphi(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

注意到 $\varphi(a)\neq 0$, 故 $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 $z=a$ 处解析, 因此 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $z=a$ 处有一级极点, 其残数

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{m}{z-a}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz=m$$

(2) $z=a$ 是 $f(z)$ 的 n 级极点.

此时我们可设

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n},$$

这里 $\psi(z)$ 在 $z=a$ 处解析, 且 $\psi(a)\neq 0$. 我们有

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{n}{z-a}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

因而 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $z=a$ 处有一级极点, 其残数

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{-n}{z-a}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}dz=-n$$

如果 $z=a$ 是 $f(z)$ 的本性奇点, 我们得不到什么有意义的结论.

我们也可以考虑如下更一般的情形.

引理 3.5.1 *设 $g(z)$ 是在 $z=a$ 处解析的函数, $z=a$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点, $z=b$ 是 $f(z)$ 的 n 级极点, 则*

$$\operatorname{Res}\left(g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=mg(a),\qquad \operatorname{Res}\left(g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)},b\right)=-ng(b). \tag{3-4}$$

证明 由前讨论,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

这里 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 处解析, 且 $\varphi(a)\neq 0$. 这样, 由 $g(z)\cdot\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 的解析性, 我们有

$$\operatorname{Res}\left(g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)},a\right)=\operatorname{Res}\left(g(z)\cdot\frac{m}{z-a},a\right).$$

显然 $z=a$ 是 $g(z)\cdot\frac{m}{z-a}$ 的一级极点或可去奇点 (这取决于 $g(a)$ 是否为零), 因而

$$\operatorname{Res}\left(g(z)\cdot\frac{m}{z-a},a\right)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot\left(g(z)\cdot\frac{m}{z-a}\right)=mg(a).$$

这就证明 (3-4) 中的第一式. 类似可证后一式. ■

3.5.2 对数导数的积分

设 $\mathscr{D}$ 是由复围线 C 围成的有界区域, $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内除了有限个极点外处处解析, 在 $\overline{\mathscr{D}}=\mathscr{D}+C$ 上连续, 并且在 C 上任何点都不取零值. 设 $z=a_1,\cdots,a_k$ 是 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内所有零点, 它们的级数分别为 $m_1,\cdots,m_k$; 类似地, 设 $b_1,\cdots,b_l$ 是 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内所有极点, 它们的级数分别为 $n_1,\cdots,n_l$.

有时为方便起见, 我们用

$$N(C,f):=\sum_{i=1}^{k}m_i,$$

$$P(C,f):=\sum_{j=1}^{l}n_j$$

分别表示 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内的零点和极点个数. 使用这些记号时要注意, m 级零点 (极点) 看成 m 个重合的零点 (极点) 来计数.

定理 3.5.1 (**对数导数的积分公式**)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N(C,f)-P(C,f).$$

证明 利用第 3.5.1 节的讨论以及残数定理, 我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a_i\right) + \sum_{j=1}^{l} \mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, b_i\right) = N(C,f) - P(C,f).$$

这一公式的奇妙之处在于: 等式右边竟然是整数! 这并非显而易见的事.

我们还能将此公式推广到加权情形.

定理 3.5.2 (对数导数的加权积分公式) 采用定理 3.5.1 的诸记号及假设. 设 $g(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上解析函数, 且在 $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 上连续, 那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{k} m_i g(a_i) - \sum_{j=1}^{l} n_j g(b_j).$$

证明 由引理 3.5.1 及残数定理立得. ■

3.5.3 幅角增量

假设 C 是简单闭曲线, $f(z)$ 是 C 上的连续函数. 当 z 从 C 上某个给定点 z_0 出发沿着 C 正向连续移动时, 幅角 $\arg f(z)$ 也会连续变化. 当 z 绕 C 一周回到 z_0 时, 幅角 $\arg f(z)$ 的连续变化量不一定等于零, 我们用 $\Delta_C \arg f(z)$ 表示这个变化量, 也称做 $f(z)$ 沿着 C 的幅角增量. 幅角增量通常与出发点 z_0 的选取无关.

例 3.5.1 设 $C: z = e^{i\theta}$, $z_0 = e^{i\theta_0}$. 我们让 z 从 z_0 出发沿着单位圆周绕行一周. 显然 z 本身的幅角从 θ_0 连续变化到 $\theta_0 + 2\pi$.

(1) $f(z) = z^n$ $(n \geq 1)$. 此时 $f(z)$ 的幅角从 $n\theta_0$ 连续变化到 $n(\theta_0 + 2\pi)$. 因此 $f(z)$ 的幅角增量为

$$\Delta_C \arg f(z) = n(\theta_0 + 2\pi) - n\theta_0 = 2n\pi.$$

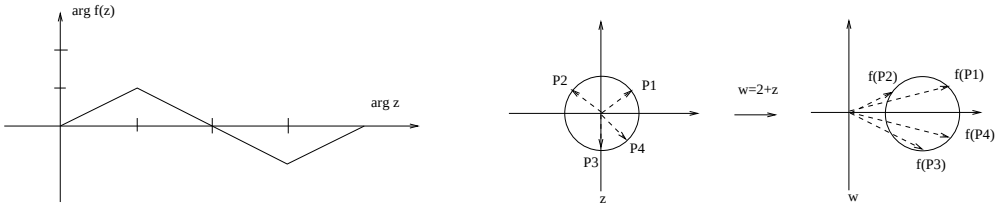
换言之, 当 z 逆时针绕原点一周后, $f(z) = z^n$ 逆时针绕原点 n 周.

(2)$f(z) = \frac{1}{z^n}$ $(n \geq 1)$. 此时 $f(z)$ 的幅角从 $-n\theta_0$ 连续变化到 $-n(\theta_0 + 2\pi)$. 因此 $f(z)$ 的幅角增量为

$$\Delta_C \arg f(z) = -n(\theta_0 + 2\pi) - (-n\theta_0) = -2n\pi.$$

换言之, 当 z 逆时针绕原点一周后, $f(z) = \frac{1}{z^n}$ 顺时针绕原点 n 周.

(3) $f(z) = 2 + z$. 为方便起见, 不妨取 $\theta_0 = 0$. 当 z 的幅角从 0 变化到 $\frac{2\pi}{3}$ 时, $f(z)$ 的幅角从 0 连续变化到 $\frac{\pi}{6}$; 当 z 的幅角从 $\frac{2\pi}{3}$ 变化到 $\frac{4\pi}{3}$ 时, $f(z)$ 的幅角从 $\frac{\pi}{6}$ 连续降至 $-\frac{\pi}{6}$; 当 z 的幅角从 $\frac{4\pi}{3}$ 变化到 2π 时, $f(z)$ 的幅角从 $-\frac{\pi}{6}$ 连续回升至 0.



因此 $f(z)$ 的幅角增量是零. ■

上例中的 (3) 可以推广到一般情形.

引理 3.5.2　设 C 是简单闭曲线, $f(z)$ 是 C 上连续函数, $a \in \mathbb{C}$ 是给定的非零常数. 如果

$$|f(z)| < |a|, \quad \forall z \in C,$$

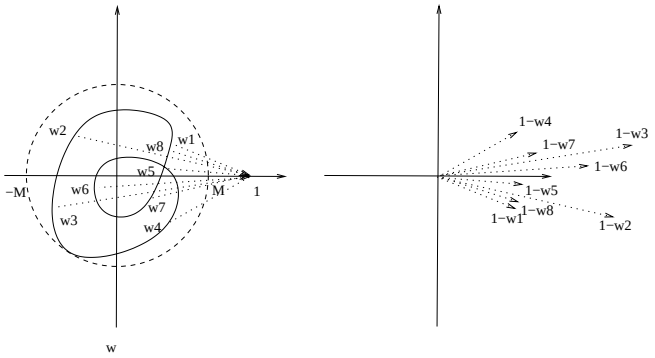
那么 $\Delta_C \arg(a - f(z)) = 0$.

证明　设 $F(z) = \frac{f(z)}{a}$, 那么 $|F(z)| < 1$. 设 $M = \max\limits_{z \in C}\{|f(z)|\}$. 因为 $f(z)$ 在 C 上连续, 所以 $|f(z)|$ 可以在 C 上某点取到 M 值, 因而 $M < 1$. 显见

$$\Delta_C \arg(a - f(z)) = \Delta_C \arg a(1 - F(z)) = \Delta_C \arg(1 - F(z)).$$

因此我们只需证明 $\Delta_C \arg(1 - F(z)) = 0$ 即可.

将 $1 - F(z)$ 视为向量, 基点平移到原点上. 注意到, 当 z 沿 C 一周时, 函数值 $w = f(z)$ 始终落在圆盘 $|w| \le M$ 内, 而 1 则在该圆盘外.



这样, 向量 $1 - F(z)$ 始终在右半平面摆动; 在 z 绕行一周后, 它最终回到初始状态. 因此 $\Delta_C \arg(1 - F(z)) = 0$. ■

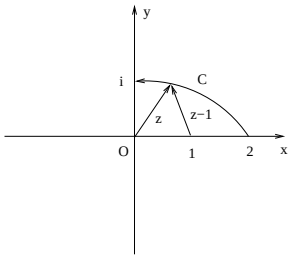
注 3.5.1　事实上, 在多值连续函数情形, 我们也能定义幅角增量, 它不依赖于函数多值性. 比如

$$\Delta_C \arg \sqrt[n]{z} := \frac{\Delta_C \arg z}{n}.$$

更一般地, 对于曲线 C 上连续函数 $g(z)$, 我们有

$$\Delta_C \arg \sqrt[n]{g(z)} := \frac{\Delta_C \arg g(z)}{n}.$$

例 3.5.2　设 $f(z) = \sqrt{z(z-1)}$, z 沿着曲线 C 从 2 到 i, 求 $\Delta_C \arg f(z)$.



■

利用幅角增量定义, 我们得到

$$\Delta_C \arg f(z) = \frac{1}{2}(\Delta_C \arg z + \Delta_C \arg(z-1)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right).$$

3.5.4 辐角原理

我们仍采用第 3.5.2 节的诸记号与假设. 从形式上看, 对数导数的原函数正是 $\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\mathrm{Arg} f(z)$. 当 z 绕复围线 C 走一圈后, $\ln f(z)$ 的实部 $\ln|f(z)|$ 并没发生变化; 然而幅角 $\arg f(z)$ 一般是要发生变化的. 具体言之,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \ln f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

结合对数导数的积分公式, 我们立得

定理 3.5.3 (辐角原理) 设 $\mathscr{D}$ 是由简单闭曲线 C 围成的有界区域, $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内除了有限个极点外处处解析, 在 $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 上连续, 并且在 C 上任何点都不取零值.

$$\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N(C,f) - P(C,f).$$

推论 3.5.1 假设 $f(z), g(z)$ 均满足辐角原理中诸条件, 那么

(1) $\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$ 是整数. 特别地, 如果 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 内解析, 那么 $\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$ 是非负整数.

(2) $\Delta_C \arg\left(f(z)\cdot g(z)\right) = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg g(z)$.

(3) $\Delta_C \arg\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \Delta_C \arg f(z) - \Delta_C \arg g(z)$.

(4) $\Delta_C \arg(f(z))^n = n\Delta_C \arg f(z)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

证明 (1) 是显然的. (3)(4) 都是 (2) 的直接推论. 今证 (2).

注意到

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g},$$

因而结合辐角原理立得所需. ■

推论 3.5.2 设 $f(z)$ 满足辐角原理诸条件, $a \in \mathbb{C}$ 是给定的非零常数, 且 $|f(z)| < |a|$, 对任意 $z \in C$, 那么

$$N(C, a - f(z)) = P(C, f(z)).$$

特别地, $f(z)$ 在 C 所围有界区域 $\mathscr{D}$ 内有极点当且仅当 $f(z) = a$ 在 $\mathscr{D}$ 内有根.

证明 由引理 3.5.2, $\Delta_C \arg(a - f(z)) = 0$. 由辐角原理推知 $N(C, a - f(z)) = P(C, a - f(z))$. 注意到 $a - f(z)$ 与 $f(z)$ 有相同的极点,故 $P(C, a - f(z)) = P(C, f(z))$. 由此即得结论. ■

例 3.5.3 设 $f(z) = \frac{(e^z-1)^2 \sin z}{z^2+2}$, 围线 $C: |z| = 4$, 当 z 沿着 C 逆时针绕行一周后, 求幅角增量 $\Delta_C \arg f(z)$.

在 C 所围区域内, $f(z)$ 有一个三级零点 $z = 0$, 另有两个一级零点 $z = \pm\pi$; 有两个一级极点 $z = \pm\sqrt{2}i$. 因此 $N(C,f) = 5$, $P(C,f) = 2$. 由辐角原理, $\Delta_C \arg f(z) = 2\pi(N - P) = 6\pi$. ■

3.6 儒歇定理

定理 3.6.1 (儒歇定理) 设 $\mathscr{D}$ 是由简单闭曲线 C 所围成的有界区域, $f(z), g(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 在 $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D} + C$ 上连续. 如果

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in C,$$

那么

$$N(C,f)=N(C,f+g)=N(C,f-g).$$

换言之, f, $f+g$ 和 $f-g$ 三者在区域 $\mathscr{D}$ 内的零点个数相同.

证明 由推论 3.5.1,

$$\Delta_C \arg(f(z)\pm g(z))=\Delta_C \arg f(z)+\Delta_C \arg\left(1\pm\frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

注意到

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1,\quad \forall z\in C,$$

因此由引理 3.5.2 可知

$$\Delta_C \arg\left(1\pm\frac{g(z)}{f(z)}\right)=0,$$

故有 $\Delta_C \arg(f(z)\pm g(z))=\Delta_C \arg f(z)$. 因为 $f(z),g(z)$ 是解析的, 因而

$$N(C,f\pm g)=\Delta_C \arg(f(z)\pm g(z))=\Delta_C \arg f(z)=N(C,f).$$

这就证明了结论. ■

例 3.6.1 考虑多项式方程 $z^4-5z+1=0$.

(1) 求该方程在 $|z|<1$ 内的根个数.

在边界 $C_1:|z|=1$ 上, 我们有

$$|-5z+1|\geq|-5z|-1=4>1=|z^4|.$$

因此 $N(C_1,z^4-5z+1)=N(C_1,-5z+1)=1$, 即方程在 $|z|<1$ 内仅有一根.

(2) 求该方程在 $1<|z|<2$ 内的根个数.

在边界 $C_2:|z|=2$ 上, 我们有

$$|z^4|=16>11=|-5z|+1\geq|-5z+1|.$$

因此 $N(C_2,z^4-5z+1)=N(C_2,z^4)=4$, 即方程在 $|z|<2$ 内恰有四根.

由 (1), 方程在 $|z|<1$ 内仅有一根, 并且 $|z|=1$ 上无根 (因为 $|z^4|<|5z-1|$). 这样, 在 $1<|z|<2$ 内恰有三个根. ■

例 3.6.2 设 $p(z)=z^n-\lambda z+1$, $|\lambda|>2$. 在单位圆周 $|z|=1$ 上, 我们有

$$|\lambda z|=|\lambda|>2=|z^n|+1\geq|z^n+1|.$$

因此 $p(z)=0$ 在 $|z|<1$ 内恰有一根. ■

例 3.6.3 设 $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 是 n 次复系数多项式, 系数满足

$$|a_n|>|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|.$$

由儒歇原理, $f(z)=0$ 在单位开圆盘 $B(0,1)$ 内恰有 n 个根. ■

例 3.6.4　求方程 $e^z - 4z^n + 1 = 0$ 在 $|z| < 1$ 内的根个数. 在单位圆周 $C : |z| = 1$ 上, 我们有

$$|e^z| \leq e^{|z|} = e < 3 = |-4z^n| - 1 \leq |-4z^n + 1|.$$

因此方程在 $|z| < 1$ 内的根个数等于 $N(C, -4z^n + 1) = n$. ■

3.7 幅角原理与儒歇定理的应用

3.7.1 代数学基本定理另一证明

我们曾经利用刘维尔定理证明了高斯代数学基本定理. 在这一小节中, 我们将用儒歇定理重新证明后者.

代数学基本定理的证明. 设

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

是 n 次复系数多项式, 我们取

$$f(z) = a_n z^n, \qquad g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

设 $C : |z| = R$ 是圆周. 注意到 $\lim\limits_{z\to\infty} \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| = 0$, 因而当 R 充分大时, 我们有

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in C.$$

由儒歇定理, $N(C, p) = N(C, f) = n$. 换言之, $p(z) = 0$ 在 C 所围开圆盘内恰有 n 个根. 又由 R 的任意性可知, $p(z) = 0$ 在整个复平面内恰有 n 个根. □

3.7.2 许瓦兹引理另一证明

让我们回顾许瓦兹引理.

定理 3.7.1 (**定理** 2.4.4)　*设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析, $|f(z)| < 1$ 且 $f(0) = 0$, 则*

$$|f(z)| \leq |z| < 1.$$

进一步, 若存在 z_0 使得 $|z_0| = |f(z_0)| < 1$, 那么 $f(z) = e^{i\theta} z$ (θ 是给定实数).

我们将利用儒歇定理重新给出一个证明. 为此需要一个引理.

引理 3.7.1　*假设 $f(z)$ 满足许瓦兹引理条件. 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足 $|\lambda| > 1$. 令*

$$F_\lambda(z) = f(z) - \lambda z.$$

那么方程 $F_\lambda(z) = 0$ 在 $|z| < 1$ 内有唯一解 $z = 0$.

证明　考虑圆周 $C_\rho : |z| = \rho$ ($\frac{1}{|\lambda|} < \rho < 1$). 注意到

$$|\lambda z| = |\lambda|\rho > 1 > |f(z)|, \quad \forall z \in C_\rho.$$

因而由儒歇定理可知, $N(C_\rho, F_\lambda) = N(C_\rho, \lambda z) = 1$. 换言之, $F_\lambda(z) = 0$ 在 $|z| < \rho$ 内仅有一解 $z = 0$.

由 ρ 的任意性, 我们可以让 ρ 趋向于 1, 这就证明了 $F_\lambda(z) = 0$ 在单位开圆盘内有唯一解 $z = 0$. ■

许瓦兹引理的证明. 假设存在 $z=\alpha$, 使得 $|\alpha|<1$ 且 $|f(\alpha)|>|\alpha|$. 令 $\lambda=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$. 由假设可知 $|\lambda|>1$.

考虑方程 $f(z)-\lambda z=0$. 由引理 3.7.1, 该方程在 $|z|<1$ 内仅有解 $z=0$, 但 $z=\alpha$ 显然也是解, 矛盾! 这就证明了对任何 $|z|<1$, 都有 $|f(z)|\leq|z|$.

命题后半部分仍由最大模原理得出, 此处不再赘述. □

3.7.3 单叶性定理

我们先叙述一个有用的引理.

引理 3.7.2 *设 $f(z)$ 在区域 $\mathscr{D}$ 上解析, $z_0\in\mathscr{D}$, $w_0=f(z_0)$. 对任意 $w\in\mathbb{C}$, 定义 $F_w(z):=f(z)-w$. 假设 z_0 是 $F_{w_0}(z)$ 的 m 级零点. 那么存在正数 ε 及 δ, 使得当*

$$0<|z-z_0|<\delta,\qquad 0<|w-w_0|<\varepsilon$$

时, $F_w(z)$ 恰有 m 个一级零点, 亦即 $F_w(z)=0$ 恰有 m 个不同根.

证明 由零点孤立性定理, 存在 $\delta>0$, 使得 $F_{w_0}(z)$ 及 $F'_{w_0}(z)=f'(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处不为零.

令

$$\varepsilon=\min_{|z-z_0|=\delta}|F_{w_0}(z)|\,.$$

当 w 满足 $0<|w-w_0|<\varepsilon$ 时, 我们有

$$|F_{w_0}(z)|\geq\varepsilon>|w-w_0|,\qquad \forall z\in C_\delta,$$

这里 $C_\delta:|z-z_0|=\delta$.

进一步注意到 $F_w(z)=F_{w_0}(z)-(w-w_0)$, 故由儒歇定理推知, $N(C_\delta,F_w(z))=N(C_\delta,F_{w_0}(z))=m$. 也就是说 $F_w(z)=0$ 有 m 个零点. 另一方面, 因为此时 $F'_{w_0}(z)=f'(z)$ 处处不等于零, 因此这些零点都是一级零点, 从而方程恰有 m 个不同的零点. ■

我们举个简单的例子来说明上述结论.

例 3.7.1 设 $f(z)=z^m$. 它在 $z=0$ 处有 m 级零点. 对任何非零值 w, 方程 $z^m-w=0$ 恰有 m 个根, 即对应根式 $\sqrt[m]{w}$ 的 m 个值. ■

设 $f(z)$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的解析函数, 如果对 $\mathscr{D}$ 内任何两个不同点 z_1,z_2, 总有 $f(z_1)\neq f(z_2)$, 我们就称它为 $\mathscr{D}$ 上的**单叶解析函数**. 单叶函数是数学分析中单调函数的推广, 当然在复数情形我们没有大小关系的比较, 因此单叶函数定义形式上看要比单调函数定义弱一点.

定理 3.7.2 (**单叶性定理**) *如果 $f(z)$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的单叶解析函数, 那么 $f'(z)\neq0$. 反过来, 如果 $f(z)$ 在某点 $z=z_0$ 处解析且 $f'(z_0)\neq0$, 那么存在 z_0 的小邻域 U, 使得 $f(z)$ 是 U 上的单叶解析函数.*

证明 (1) 假设 $f(z)$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的单叶解析函数. 如果存在 $z_0\in\mathscr{D}$, 使得 $f'(z_0)=0$, 那么 z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的的至少二级零点. 由引理 3.7.2, 对充分接近 $w_0=f(z_0)$ 的值 w, 方程

$f(z)-w=0$ 至少有两个零点. 换言之, $f(z)$ 不是单叶的, 矛盾! 因而导函数 $f'(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上处处不为零.

(2) 假设 $f(z)$ 在某点 $z=z_0$ 处解析且 $f'(z_0)\neq 0$. 此时 $z=z_0$ 是 $f(z)-w_0$ 的一级零点. 由引理 3.7.2, 存在正数 ε 及 δ, 使得当

$$0<|z-z_0|<\delta, \qquad 0<|w-w_0|<\varepsilon$$

时, $f(z)-w=0$ 恰有一个一级零点, 即在该邻域内仅有唯一的 z 使得 $f(z)=w$. 注意 $f(z)$ 是连续的, 因此适当缩小 δ, 使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时, 有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ 成立, 从而 $f(z)$ 是单叶的. ■

例 3.7.2 考虑分式线性变换 $f(z)=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$ $(z_1\neq z_2)$. 它是 $\mathbb{C}-\{z_2\}$ 上的单叶解析函数, 在 $z=z_2$ 处有一级极点. 由第 2.2.4 节讨论, 我们有

$$f'(z)=k\cdot\frac{(z_1-z_2)}{(z-z_2)^2}.$$

显然该导函数在 $\mathbb{C}-\{z_2\}$ 上处处非零. 这与单叶性定理所描述的性态完全一致. ■

例 3.7.3 设 $f(z)=z^n$. 前面的例子表明它不是 $\mathbb{C}$ 上的单叶函数. 考虑 $\mathscr{D}=\{z\mid -\frac{\pi}{n}<\arg z<\frac{\pi}{n},\ z\neq 0\}$. 可以验证 $f(z)$ 在 $\mathscr{D}$ 上是单叶的. ■

3.7.4 保区域性定理

回顾定理 1.8.3, 我们要用儒歇定理证明其中的第一部分.

定理 3.7.3 (**保区域性定理**) *设 $f(z)$ 是区域 $\mathscr{D}$ 上的非常值解析函数, 那么 $f(\mathscr{D})$ 也是区域.*

证明 设 $z_0\in\mathscr{D}$, 我们要证明 $w_0=f(z_0)\in f(\mathscr{D})$ 是内点, 即存在 w_0 的开邻域含于 $f(\mathscr{D})$ 内. 由引理 3.7.2, 存在正数 ε 及 δ, 使得当

$$|z-z_0|<\delta, \qquad |w-w_0|<\varepsilon$$

时, 方程 $f(z)-w=0$ 有解. 换言之, 对 $|w-w_0|<\varepsilon$ 中的每个值 w, 存在 z 使得 $f(z)=w$. 这样, 我们就找到了 w_0 在 $f(\mathscr{D})$ 内的开邻域. ■

由保区域性定理, 我们很容易重新推出最大模原理 (留给读者完成).

3.7.5 实系数方程在半平面内的根数

设 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 是实系数 n 次多项式 $(a_n\neq 0)$, 即诸系数 $a_i\in\mathbb{R}$. 我们假设 $f(z)=0$ 的根不落在虚轴 L 上. 我们规定 L 的方向是从上往下. 不失一般性, 我们可以假设 $a_n=1$.

首先计算 $\Delta_L\arg f(z)$.

命题 3.7.1 *在上述假设条件下, 我们有*

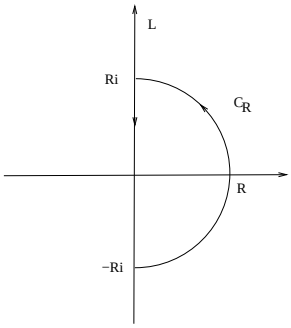
(1) $\Delta_L\arg f(z)=k\pi$, *这里 k 是与 n 有相同奇偶性的整数, 且 $|k|\leq n$.*

(2) *方程 $f(z)=0$ 在右半平面内的根的个数恰好是 $\frac{n+k}{2}$; 在左半平面内的根的个数是 $\frac{n-k}{2}$.*

证明 设 $f(z)=0$ 在右半平面内恰有 r 个根. 考虑半径为 R 的半圆周

$$C_R:\ z=e^{i\theta},\quad -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}.$$

C_R 在虚轴上截出线段 $L_R : z = it,\ -R \le t \le R.$ 我们考虑由 $C_R + L_R$ 围成的有界区域 $\mathscr{D}_R = \{z \mid \mathrm{Re}z > 0, \quad |z| < R\}$.



因此由辐角原理, 我们有

$$N(C_R + L_R, f(z)) = \frac{1}{2\pi}\left(\Delta_{C_R}\arg f(z) + \Delta_{L_R}\arg f(z)\right). \tag{3-5}$$

注意到 $\Delta_{C_R}\arg z^n = n\Delta_{C_R}\arg z = n\pi$, 故由推论 3.5.1 得

$$\begin{aligned}\Delta_{C_R}\arg f(z) &= \Delta_{C_R}\arg z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)\\ &= n\pi + \Delta_{C_R}\arg\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right).\end{aligned}$$

进一步, 因为

$$\lim_{z\to\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right) = 1,$$

所以类似引理 3.5.2 的讨论可知

$$\lim_{R\to\infty}\Delta_{C_R}\arg\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right) = 0,$$

从而 $\lim\limits_{R\to\infty}\Delta_{C_R}\arg f(z) = n\pi$. 此外, 显然也有 $\Delta_L\arg f(z) = \lim\limits_{R\to\infty}\Delta_{L_R}\arg f(z)$.

另一方面, 当 R 充分大时, 区域 $\mathscr{D}_R$ 内包含所有右半平面的根. 因此由式 (3-5) 及其他极限式, 我们有

$$r = \lim_{R\to\infty} N(C_R + L_R, f(z)) = \frac{1}{2\pi}\left(n\pi + \Delta_L\arg f(z)\right),$$

即

$$k := \frac{\Delta_L\arg f(z)}{\pi} = 2r - n$$

是整数, 且与 n 奇偶性相同. 又因为 $0 \le r \le n$, 因此上式推出 $|k| \le n$. ■

设 $z = it$, 当 z 沿着虚轴 L 从上往下走时, 相当于 t 沿着实轴从右到左走. 将 $z = it$ 代入 $f(z)$ 并写成实部与虚部表达式

$$f(it) = \left(\sum_{0\le m\le\frac{n}{2}} a_{2m}(-1)^m t^{2m}\right) + i\left(\sum_{0\le m\le\frac{n-1}{2}} a_{2m+1}(-1)^m t^{2m+1}\right).$$

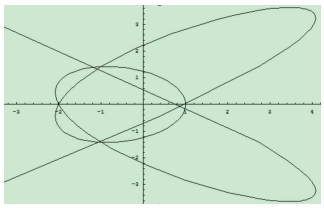
$f(it)$ 作为 t 的参数曲线, 当 t 沿着实轴从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 时, 我们可以直接计算出 $\Delta_L\arg f(z)$. 这样就能算出方程 $f(z) = 0$ 在右半平面内的根数.

例 3.7.4 设 $f(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$, 求方程 $f(z) = 0$ 在右平面内的根个数.

将 $z=it$ 代入方程得

$$f(it)=\left(-t^6+6t^4-8t^2+1\right)+i\left(t^5-5t^3+4t\right).$$

$f(it)$ 作为 t 的参数曲线有如下图像.



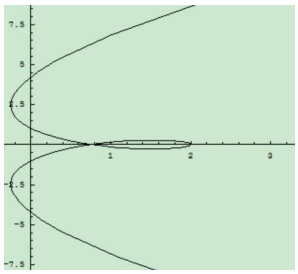
因此当 t 从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 时, $\Delta_L \arg f(z)=-6\pi$. 由命题 3.7.1, 方程 $f(z)=0$ 在右半平面无根. ■

例 3.7.5 设 $f(z)=z^4+2z^3+3z^2+z+2$, 求方程 $f(z)=0$ 在右平面内的根个数.

将 $z=it$ 代入方程得

$$f(it)=\left(t^4-3t^2+2\right)+i\left(-2t^3+t\right).$$

$f(it)$ 作为 t 的参数曲线有如下图像.



因此当 t 从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 时, $\Delta_L \arg f(z)=0$. 方程 $f(z)=0$ 在右半平面有 2 个根. ■

推论 3.7.1 (Bring-Jerrard **多项式**) 设 $f(z)=z^n+az+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $ab\neq 0$. 设方程 $f(z)=0$ 在右半平面内恰有 r 个根, 那么

(1) 若 n 是奇数, 则

$$r=\begin{cases}\frac{n-1}{2}, \text{ if } (-1)^{\frac{n-1}{2}}b>0,\\ \frac{n+1}{2}, \text{ if } (-1)^{\frac{n-1}{2}}b<0,\end{cases}$$

(2) 若 n 是偶数, 并且 $(-1)^{\frac{n}{2}}b>0$, 则 $r=\frac{n}{2}$.

(3) 若 n 是偶数, 并且 $(-1)^{\frac{n}{2}}b<0$, 则

$$r=\begin{cases}\frac{n}{2}-1, \text{ if } ab>0,\\ \frac{n}{2}+1, \text{ if } ab<0,\end{cases}$$

3.8 残数定理的应用

3.8.1 三角有理函数的积分

假设 $R(x,y)$ 是关于 x,y 的有理函数, 即 R 可以写成 $R=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, 这里 f,g 是关于 x,y 的多项式. 我们希望计算如下形式的积分

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta.$$

考虑单位圆 $C: z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. 对单位圆上的点 z, 我们有

$$\cos\theta = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

将上式代入积分即得

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = \int_C R\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}, \frac{z+\bar{z}}{2}\right)\frac{dz}{iz}.$$

另外, 对单位圆上的点 z 来说, $\bar{z} = \frac{1}{z}$, 将其代入上式右端得

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta = \int_C R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{dz}{iz}.$$

因此我们就可以直接应用残数定理计算上面的积分.

例 3.8.1 (1) 求积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$

上述积分等于

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1} = 4\pi \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, \sqrt{3}-2\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(2) 求积分

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$

注意被积函数是偶函数且以 2π 为周期, 因此上述积分等于

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

例 3.8.2 求积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+2p\cos\theta+p^2}, \quad |p| \ne 1.$$

上述积分等于

$$\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2+(p^2+1)z+p} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(pz+1)(z+p)}.$$

■

如果 $|p| > 1$, 那么单位圆盘内仅有一级极点 $z = -\frac{1}{p}$, 从而

$$\mathrm{Res}(f, -\frac{1}{p}) = \frac{1}{p^2-1}.$$

如果 $|p| < 1$,那么单位圆盘内仅有一级极点 $z = -p$, 从而

$$\mathrm{Res}(f, -p) = \frac{1}{1-p^2}.$$

这样, 由残数定理即得

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+2p\cos\theta+p^2} = \frac{2\pi}{|p^2-1|}.$$

例 3.8.3 求积分

$$\int_0^{2\pi} \cos^n\theta d\theta, \quad |p| \ne 1.$$

上述积分等于

$$\frac{1}{i2^n}\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}=\frac{1}{i2^n}\int_{|z|=1}\frac{\left(z^2+1\right)^n}{z^{n+1}}dz.$$

$z=0$ 是单位圆盘内的唯一极点. 通过直接计算, 我们有

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\left(z^2+1\right)^n}{z^{n+1}},0\right)=\begin{cases}\frac{(2m)!}{(m!)^2}, & n=2m,\\ 0, & n=2m-1.\end{cases}$$

因此由残数定理得

$$\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 2\pi, & n=2m,\\ 0, & n=2m-1,\end{cases}$$

这里 $n!!$ 是指双阶乘, 即所有不超过 n 且与 n 有相同奇偶性的正整数乘积. ■

例 3.8.4　类似地, 我们有

$$\int_0^{2\pi}\sin^n\theta d\theta=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 2\pi, & n=2m,\\ 0, & n=2m-1,\end{cases}$$ ■

3.8.2 有理函数的广义积分

设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理函数, 即 P,Q 是多项式. 假设 f 满足以下条件:

(1) 方程 $Q(z)=0$ 没有实根;

(2) $\deg Q-\deg P\geq 2$;

(3) P,Q 没有公因子.

定理 3.8.1　*假设 $\{a_j\}_{j=1}^k$ 是 f 在上半平面内的所有奇点 (不包括 ∞). 我们有*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_j\right).$$

(证明见第 3.8.4 节.)

例 3.8.5　求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}.$$

$f(z)=\frac{1}{z^2+z+1}$ 在上半平面仅有一级极点 $z=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, 其残数

$$\operatorname{Res}\left(f,e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)=\lim_{z\to e^{\frac{2\pi i}{3}}}(z-e^{\frac{2\pi i}{3}})f(z)=\frac{1}{\sqrt{3}i}.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

当然, 我们也可以利用变量替换 $y=\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}$ 直接计算, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

例 3.8.6　求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

$f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ 在上半平面有两个一级极点 $z=e^{\frac{\pi i}{4}}$ 及 $z=e^{\frac{3\pi i}{4}}$.

$$\operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{\pi i}{4}}\right)=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}}, \qquad \operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3.8.3　加权有理函数的广义积分

我们对第 3.8.2 节的有理函数 $f=\frac{P}{Q}$ 的假设条件 (2) 稍作修改, 只要求 $\deg Q>\deg P$ 即可. 设 ν 是任何正实数.

定理 3.8.2　*假设 $\{a_j\}_{j=1}^k$ 是 f 在上半平面内的所有奇点 (不包括 ∞). 我们有*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\nu x}dx=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z}, a_j\right).$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\sin\nu x\,dx=\operatorname{Im}\left(2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left(\tfrac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z}, a_j\right)\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos\nu x\,dx=\operatorname{Re}\left(2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\left(\tfrac{P(z)}{Q(z)}e^{i\nu z}, a_j\right)\right).$$

(证明见第 3.8.4 节.)

例 3.8.7　求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}dx.$$

$f(z)=\frac{z}{z^2+1}e^{iz}$ 在上半平面仅有一级极点 $z=i$, 其残数

$$\operatorname{Res}(f, i)=\frac{1}{2e}.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}e^{ix}dx=\frac{\pi}{e}i.$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}dx=\operatorname{Im}(\frac{\pi}{e}i)=\frac{\pi}{e}.$$

例 3.8.8　求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+1}dx.$$

利用倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx.$$

这样, 我们就将积分归结成已知的情形. 首先

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{x^2+1}, i\right) = \frac{\pi}{2}.$$

其次, 由定理 3.8.2,

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}e^{2iz}, i\right)\right) = \frac{\pi}{2e^2}.$$

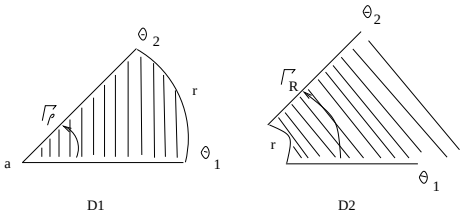
综上可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right).$$

3.8.4 定理 3.8.1 与定理 3.8.2 的证明及其他应用

我们这里先介绍若干引理, 它们在处理各种实积分运算时非常有效. 考虑以下两种扇形区域

$$\mathscr{D}_1 : 0 < |z-a| < r, \quad \theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2,$$
$$\mathscr{D}_2 : \quad r < |z| < +\infty, \quad \theta_1 \le \arg z \le \theta_2,$$



引理 3.8.1 (1) 假设 $f(z)$ 是 $\mathscr{D}_1$ 上的连续函数, 且存在极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}(z-a)f(z) = \lambda$, 那么

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma_\rho} f(z)dz = i\lambda(\theta_2 - \theta_1),$$

这里 $\Gamma_\rho : z = a + \rho e^{i\theta}$, $0 < \rho < r$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

(2) 假设 $f(z)$ 是 $\mathscr{D}_2$ 上的连续函数, 且存在极限 $\lim\limits_{R\to+\infty} zf(z) = \lambda$, 那么

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = i\lambda(\theta_2 - \theta_1),$$

这里 $\Gamma_R : z = Re^{i\theta}$, $r < R < +\infty$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

证明 (1) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|z-a| < \delta$ 时,

$$|(z-a)f(z) - \lambda| < \varepsilon.$$

因此当 $\rho < \delta$ 时, 有

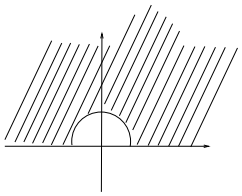
$$\left|\int_{\Gamma_\rho} f(z)dz - i\lambda(\theta_2-\theta_1)\right| = \left|\int_{\Gamma_\rho} \frac{(z-a)f(z)-\lambda}{z-a}dz\right| \le \frac{\varepsilon}{(\theta_2-\theta_1)}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot(\theta_2-\theta_1)\rho = \varepsilon.$$

这就证明了结论.

(2) 可以通过反演变换归结为情形 (1). ■

考虑如下扇形区域

$$\mathscr{D}_3 : r \leq |z| < +\infty, \quad \mathrm{Im} z > 0.$$



类似地, 我们也有如下引理 (证略).

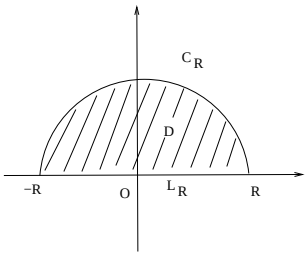
引理 3.8.2 假设 $f(z)$ 是 $\mathscr{D}_3$ 上的连续函数, 且存在极限 $\lim\limits_{\rho\to 0} f(z) = 0$, 那么对任何正实数 k, 我们有

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{ikz} f(z) dz = 0,$$

这里 $\Gamma_R : z = Re^{i\theta}$, $r < R < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

定理 3.8.1 的证明. 设

$$C_R : z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad L_R : z = t, -R \leq t \leq R.$$



$\mathscr{D}$ 是以 $C_R + L_R$ 为边界的有界区域, 这里 R 是充分大正数, 使得 $\mathscr{D}$ 包含 $f(z)$ 所有的上半平面内的奇点. 由残数定理,

$$\int_{C_R+L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, a_j\right).$$

对上式左边取极限得

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R+L_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz.$$

因为 $\deg Q - \deg P \geq 2$, 所以 $\lim\limits_{R\to+\infty} zf(z) = 0$. 由引理 3.8.1 即得

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

结合以上诸式即得结论. ■

定理 3.8.2 的证明是类似的, 可利用残数定理和引理 3.8.2 得到, 这里不再赘述.

利用引理 3.8.1 和引理 3.8.2 等类似估计, 我们还可求出其他一些经典的广义实积分.

例 3.8.9　求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

注意这个积分函数不满足定理 3.8.2 的条件 (1), 因此我们不能直接用该定理计算. 设 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. 考虑由以下积分路径

$$\Gamma_R : z = Re^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \qquad \Gamma_\varepsilon : z = \varepsilon e^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

以及实轴上的线段 $[-R, \varepsilon]$ 和 $[\varepsilon, R]$ 所围成的区域 $\mathscr{D}$. 由柯西积分定理

$$0 = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \tag{3-6}$$

今对上式右边取极限. 由引理 3.8.1 和引理 3.8.2, 我们有

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi.$$

另一方面,

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx.$$

因此

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = 2i \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

将诸式代入 (3-6) 即得结论. ■

3.8.5　双周期函数

在数学分析中, 我们曾经专门研究了定义在实轴上的周期函数. 最基本的周期函数当然是三角函数 $\sin x$ 及 $\cos x$. 其他的周期函数往往可以由傅立叶展开为一系列三角函数得到.

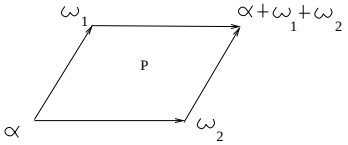
复变函数中, 我们很自然地可以推广这一概念. 当然此时的函数定义域从直线变成了复平面, 因而这个函数应该具备两个不同方向的周期.

定义 3.8.1　如果一个半纯函数 (即在复平面上除了极点外处处解析) $f(z)$ 满足以下条件, 就称为双周期函数或椭圆函数:

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2),$$

这里 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ 是给定的非零常数 (称作周期), 并且它们作为向量看, 要求线性无关.

我们研究数分中的周期函数通常只要限制在一段长度为周期单位的区间上看就行了. 在复变中, 对于双周期函数来说也是如此. 我们只需要考察如下的平行四边形区域 P



我们将它称作基本平行四边形.

定理 3.8.3 (**刘维尔定理**)　设 $f(z)$ 是以 P 为基本平行四边形的双周期函数, 且在 P 的边界 L 上没有极点和零点. 设 $\{a_i\}_{i=1}^n$ (相应地, $\{b_j\}_{j=1}^m$) 是 $f(z)$ 在 P 内的所有极点 (相应地, 零

点). 设 n_i (相应地, m_j) 是极点 (相应地, 零点) a_i (相应地, b_j) 的阶数. 那么

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i) = 0.$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} n_i = \sum\limits_{j=1}^{m} m_j.$

(3) 存在整数 a, b, 使得

$$-\sum_{i=1}^{n} n_i a_i + \sum_{j=1}^{m} m_j b_j = a\omega_1 + b\omega_2.$$

证明 (1) 考虑积分 $\int_L f(z)dz$. 它可以分解成平行四边形四条边上的积分. 注意到 $f(z)$ 的双周期性, 因此对边上的积分之和恰好为零. 这就推出

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

再由残数定理立得结论.

(2) 注意到 f'/f 仍然是以 P 为基本平行四边形的双周期函数, 因此由 (1) 立得

$$\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0.$$

再由对数导数的积分公式 (定理 3.5.1) 即得所需.

(3) 由加权对数导数的积分公式, 我们得

$$2\pi i\left(-\sum_{i=1}^{n} n_i a_i + \sum_{j=1}^{m} m_j b_j\right) = \int_L z\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

另一方面,

$$\int_L z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

考虑其中一组对边的积分

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

利用周期性可知上述值为

$$-\omega_2\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

注意到 $f(\alpha) = f(\alpha+\omega_1)$, 故

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = i\Delta_{[\alpha,\alpha+\omega_1]}\arg f(z) = 2\pi i b,$$

这里 b 是整数. 因而上述对边上的积分

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i b\omega_2.$$

类似地, 另一组对边的积分

$$\int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i a\omega_1, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

这就证明了结论. ■

例 3.8.10　最著名的双周期函数是魏尔斯特拉斯函数

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}{}'\left(\frac{1}{(z-n\omega_1-m\omega_2)^2}-\frac{1}{(n\omega_1+m\omega_2)^2}\right),$$

这里求和号 $\sum\limits_{n,m\in\mathbb{Z}}{}'$ 表示 n,m 跑遍全体整数, 但不能同时取零. ■

我们这里罗列几个关于双周期函数的重要结论.

定理 3.8.4　(1) 任何双周期函数都可写成关于 $\wp(z)$ 和 $\wp'(z)$ 的有理函数表示. 反之亦然. (2) 存在只和周期 ω_1,ω_2 有关的常数 a,b, 使得

$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3+a\wp(z)+b,\quad a^3+27b^2\neq 0.$$

本章习题

加 $*$ 号的习题表示有一定难度.

习题 3.1　请分析 $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{\sin z}$ 的所有奇点类型, 并指出那些极点的级数.

习题 3.2　设 $\mathscr{D}$ 是由简单闭曲线 C 围成的有界区域, $f(z)$ 是 $\mathscr{D}$ 内解析函数, 在边界连续, 且 $|f(z)|<1,\forall z\in C$. 证明: $f(z)=1$ 在 $\mathscr{D}$ 内根的个数等于 $N(C,f)$.

习题 3.3　方程 $z^4-8z+10=0$ 在 $|z|<1$ 内有几个根? 在 $1<|z|<3$ 内有几个根?

习题 3.4　设 $f(z)=\frac{(\sin z)^2}{(1+z^2)^3}$, $C:|z|=4$, 试求幅角增量 $\Delta_C\arg f(z)$ 的幅角增量.

习题 3.5　用保区域性定理证明最大模原理.

习题 3.6　讨论方程 $z^n+az^{n-1}+b=0$ 在右半平面内根的个数.

习题 3.7　求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\lambda x+1},\qquad |\lambda|<2.$$

参 考 文 献

[AM69] 拉夫连季耶夫: 复变函数论方法 (第二版), 高等教育出版社, 2006.

索 引

n-次根函数, 17

Möbius 变换, 9

Picard 定理, 44

保边界性, 12
保交比性, 11
保圆周性, 10
本型奇点, 42
本原单位根, 6
闭域, 11

残数, 46
残数定理, 49, 50
残数总和定理, 52

代数学基本定理, 5, 31

单连通, 26
单位根, 6
单叶解析函数, 60
单值函数, 16
调和函数, 20

对称, 12
对数导数, 53
对数函数, 17
多项式函数, 16
多值函数, 16

发散, 34
反演变换, 9
分式线性变换, 9
辐角原理, 57
幅角, 3
幅角增量, 55

复变函数, 16
复化方程, 2
复积分, 23
复平面, 2
复数, 1
复数域, 2
复围线, 26
刚性定理, 38
高斯平面, 2

共轭调和函数, 20
共轭复数, 1
孤立奇点, 42

极点, 42
极限, 7
级数, 33

交比, 11
解析, 18
解析函数, 18

距离, 6
绝对收敛, 34
均值公式, 31

开圆盘, 12
柯西-黎曼条件, 19
柯西不等式, 30
柯西导数公式, 29
柯西积分定理, 26
柯西积分公式, 27
可导, 18
可去奇点, 42
可微, 18

扩充复平面, 7
拉普拉斯算子, 20

连续函数, 18
零点, 37
零点孤立性定理, 37
留数, 46

罗朗展开, 39

幂函数, 17
幂级数, 35

模, 3
内闭一致收敛, 34

欧拉公式, 4
欧拉函数, 6

奇点, 42

球极投影, 8
区域, 11

儒歇定理, 57
三角表示, 3
三角函数, 16

上半平面, 12

实部, 1
实数域, 2
收敛, 33
收敛半径, 35
收敛域, 34

双边幂级数, 39
双周期函数, 69

泰勒展开, 35

椭圆函数, 69

魏尔斯特拉斯定理, 34
魏尔斯特拉斯函数, 71
无界区域, 50
无穷远点, 7

相似变换, 9

虚部, 1
虚数单位, 1
许瓦兹引理, 33

有理函数, 16

整函数, 30
正则部分, 39, 45

指数表示, 4
指数函数, 16
周期, 69
主幅角, 3
主要部分, 39, 45

自然对数, 4
最大模原理, 32
坐标表示, 2

棣美弗公式, 5