华东师范大学期末试卷 (A): 2009—2010 学年第 1 学期

课程名称: 拓 扑 学　　上课教师: 陆 俊

学生姓名: _____　　学　　号: _____

专　　业: _____　　年级/班级: 2007 级

课程性质: 基 地 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 20 分) 简单叙述以下概念或结论 (X 是拓扑空间):

(1) $A \subseteq X$ 子空间拓扑;　　(2) 可度量化空间;

(3) 连通性;　　(4) 拓扑基.

二、(20 分) 单项选择题

(1) 圆柱面及莫比乌斯带的欧拉示性数分别是 [ ]
(A) $(0,0)$　　(B) $(1,0)$　　(C) $(0,1)$　　(D) $(1,1)$.

(2) 环面的基本群和第一同调群分别是 [ ]
(A) $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$　　(B) $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$　　(C) $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$,　　(D) $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

(3) 下面哪一组拓扑空间同胚 [ ]
(A) $(-1,1)$, $[-1,1)$　　(B) $(-1,1)$, $[-1,1]$　　(C) $[-1,1]$, $[-1,1)$　　(D) $[-1,1)$, $(-1,1]$.

(4) 下面哪一组性质是直线 $\mathbb{R}^1$ 和单位圆 S^1 共同拥有的 [ ]
(A) 紧性, 可度量化 (B) 连通性, Huasdorff 性质 (C)单连通, 道路连通 (D) 极限点紧, 有可数基.

三、(20 分) 判断以下结论是否正确. 如正确, 请简单说明; 如错误, 请举反例.

(1) 拓扑空间 X 中无限个两两不相交的闭集的并一定不是闭集.

(2) 拓扑空间 X 中有限个紧子集的并是紧的.

(3) 设 $f: X \to \mathbb{R}^1$ 是连续满射, 那么 $F = f^{-1}(0)$ 是紧子集.

(4) 设 $f: X \to Y$ 是连续满射, X 道路连通, 那么 Y 也道路连通.

四、(20 分) 设 $X = \mathbb{R}^1$ 是直线.

(1) 设

$$\mathscr{B} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}^1\}.$$

证明: $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的一个拓扑基. 请判断它和标准拓扑之间的粗细关系.

(2) 设 $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. 分别求以下集合

$$Int(A),\ \overline{A},\ A',\ Int(X - A),\ \overline{X - A},\ (X - A)'$$

这里 $\mathbb{Q}$ 是有理数集, $Int(A)$, $\bar{A}$ 和 A' 分别指 A 内部, 闭包和导集 (即极限点全体), $X - A$ 指 A 补集.

(3) 分别构造 $\mathbb{R}^1$ 和 $(0, 1)$ 的同胚; $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 的同胚, 这里 S^2 是球面.

(4) 证明: $f : Y \to Z$ 是连续映射当且仅当对 Y 的任何子集 B, 有 $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$.

五、(20 分)
(1) 利用拓扑性质证明: $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $B^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 两两不同胚.

(2) 证明: 紧空间必定是极限点紧的, 即任何无穷子集一定含有极限点.

(3) 证明: 两个 Huasdorff 空间的笛卡尔积也是 Huasdorff 空间.