华东师范大学期末试卷 (A): 2009—2010 学年第 1 学期

课程名称: 拓 扑 学　　上课教师: 陆 俊

学生姓名:　　学　　号:

专　　业:　　年级/班级: 2007 级

课程性质: 基 地 必 修

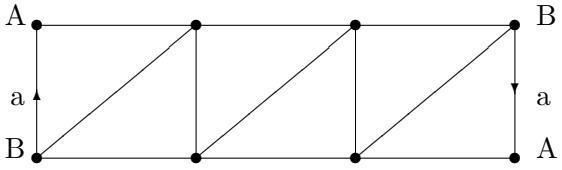
一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 20 分) 简单叙述以下概念或结论 (X 是拓扑空间):

(1) X 中的闭集;　　(2) Hausdorff 空间;

(3)道路连通;　　(4) 同胚映射.

二、(16 分)
(1) 计算以下 Möbius 带的三角剖分中顶点数 V, 边数 E 及三角形数 F, 并求欧拉示性数 χ (对应的边 a 粘合).



(2) 请简单叙述一下 Möbius 带具有哪些性质 (至少两项).

三、(24 分) 设 $X = \mathbb{R}^1$ 是直线, 具有标准拓扑.

(1) 设

$$\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a < b, a, b\text{是有理数}\}.$$

证明: $\mathscr{B}$ 是生成 $\mathbb{R}^1$ 上标准拓扑的一个拓扑基.

(2) 设 $A = (2,3) \cup (3,4) \cup \{5\}$. 分别求以下集合

$$Int(A),\ \overline{A},\ A',\ Int(X-A),\ \overline{X-A},\ (X-A)'$$

这里 $Int(A)$ 指 A 内部, $\bar{A}$ 指 A 闭包, A'指 A 导集 (即极限点全体), $X - A$ 指 A 补集, 其余类似.

(3) 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数集. 证明: $\mathbb{Q}$ 既不是 X 的开集也不是 X 的闭集, 且 $\mathbb{Q}$ 中的连通子集只有单点集.

四、(20 分)
(1) 利用拓扑性质证明: $\mathbb{R}^1$ 中的区间 $(0,1)$, $(0,1]$, $[0,1]$ 两两不同胚.

(2) 设 $A=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的收敛点列, 证明: 闭包 $\overline{A}$ 作为 $\mathbb{R}^1$ 的拓扑子空间, 是紧的、Hausdorff 的、有界闭集.

(3) 请给出上述 $\overline{A}$ 是连通子空间的充要条件, 并简要证明之.

五、(20 分, 不计附加题分) 设 $\mathbb{R}^1$ 是直线, $S^1=\{(x,y)\subseteq\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ 是单位圆, 都具有标准拓扑.

(1) 设 $N=(0,1)\in S^1$ 是 S^1 的北极点. 证明:

$$f:\mathbb{R}^1\longrightarrow S^1-N,\qquad t\longrightarrow f(t)=\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{t^2-1}{t^2+1}\right).$$

是 $\mathbb{R}^1$ 到 S^1-N 的同胚.

(2) 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数集, 作为 $\mathbb{R}^1$ 的拓扑子空间. X 是连通的拓扑空间. 设 $g:X\to\mathbb{Q}$ 是连续函数. 证明: g 必定是常值函数. 请问: 将 $\mathbb{Q}$ 换成整数集 $\mathbb{Z}$ 或者无理数集 $\mathbb{R}^1-\mathbb{Q}$, 该结论成立吗?

(3) 设 B 是 $\mathbb{R}^1$ 中的非空闭集, $d(x)=\inf\{|\ x-b\ |\ |\ b\in B\}$, $\forall x\in\mathbb{R}^1$, 验证 $d(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上连续函数, 且 $d(x)=0$ 当且仅当 $x\in B$.

(4^*) (可选附加题 10 分) 在上一小题中, 设 $C=\{x\in X \mid d(x)$是有理数$\}$, 证明: 如果 B 不连通, 那么 C 也不连通.