华东师范大学期末试卷(B): 2010—2010 学年第 2 学期

课程名称: 流 形 上 的 微 积 分

学生姓名: _____ 学 号: _____

专 业: _____ 年级/班级: 2006 级

课程性质: 非 师 范 选 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 20 分)请简要叙述以下概念.
(1) 拓扑流形; (2) 切空间; (3) 多重线性函数; (4) 黎曼曲面

二、(20 分)设 e_1, e_2, e_3 是向量空间 $V = \mathbb{R}^3$ 的一组基:
(1) 分别计算以下各式在标准基下的表达式:

$$(e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2 + e_3), \quad (e_1 - e_2) \wedge (e_1 + e_2);$$

(2) 设 V^* 是 V 的对偶空间, $F(V,V)$ 是V上的二重线性函数全体构成的线性空间. 证明: $V^* \otimes V^*$ 与 $F(V,V)$ 是 $\mathbb{R}$-线性同构的.

(3) 考虑向量 $\vec{v}_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3$, $i = 1, 2, 3$. 设 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ 是对应的方阵. 证明:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3 = \det(A) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

这里 $\det(A)$ 是方阵 A 的行列式. (提示: 可构造三重线性函数, 将问题归结为特殊情形来验证.)

三、(共 20 分) 设 $\mathbb{R}^2$ 中的坐标是 (x, y).
(1) 考虑切向量

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

设 $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, 分别求

$$X(f), \quad XY(f), \quad [X, Y](f),$$

这里 $[X, Y]$ 是李括号算子.

(2) 假设 g, h 是两个光滑函数, X, Y 是任意光滑切向量场. 证明:

$$[X, Y](gh) = g[X, Y]h + h[X, Y]g.$$

四、(20 分) 设 $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ 的局部坐标是 (x, y).
(1) 求以下各光滑余切向量场的外微分:

$$\alpha = \frac{ydx}{x} + \frac{xdy}{y},$$
$$\beta = \frac{xdx}{x^2+y^2} + \frac{ydy}{x^2+y^2};$$
$$\gamma = \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2}$$

并判断它们是否为闭形式, 以及是否为恰当形式;

(2) 设 $\omega = Pdx + Qdy$ 是光滑余切向量场. 请给出它为闭形式的充要条件, 并说明理由.

(3) 请阐释二重积分的格林公式与 Stokes 公式的关系.

五、(20 分)考虑以下实平面中的子集:

$$M_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
$$M_2 = \{(x, y) \mid xy = 0\}.$$

(1) 试验证 M_1 在通常拓扑下是流形, 而 M_2 不是流形.
(2) 假如允许 x, y 取复数, 请证明以下复流形 M_1' 作为实流形来看, 是同胚于球面的黎曼曲面.

$$M_1' = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ x, y \in \mathbb{C}\}$$

(提示: 考虑多值函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的支割线, 粘合各单值分支)