华东师范大学期末试卷(A): 2010—2010 学年第 2 学期

课程名称: 流 形 上 的 微 积 分

学生姓名: _____ 学 号: _____

专 业: _____ 年级/班级: 2006 级

课程性质: 非 师 范 选 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 20 分) 设 e_1, e_2, e_3 是向量空间 $V = \mathbb{R}^3$ 的一组基:
(1) 分别写出二阶张量空间 $V \otimes V$ 和二次外积空间 $\wedge^2 V$ 的一组标准基;

(2) 分别计算以下各式在标准基下的表达式:

$$(e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2), \quad (e_1 - e_2) \wedge (e_2 - e_2) \wedge (e_3 - e_1);$$

(3) 设 $M_2(\mathbb{R})$ 是全体二阶实系数方阵构成的空间. 证明: $V \otimes V$ 与 $M_2(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$-线性同构;

二、(20 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标是 (x, y, z).
(1) 求以下各式的外微分:

$$\alpha = yzdx + xzdy + xydz,$$
$$\beta = \frac{dx \wedge dy}{z} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dy \wedge dz}{x} \quad (xyz \neq 0);$$

并判断它们是否为闭形式, 以及是否为恰当形式;

(2) 设 $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 是三维闭球体. 设

$$\omega = zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz$$

是边界球面 ∂M 上的二次外微分式. 请利用 Stokes 公式, 将以下曲面积分

$$\int_{\partial M} \omega.$$

转化为体积分, 并求其值.

(3) 请阐释牛顿-莱布尼兹公式和 Stokes 公式的关系.

三、(共 20 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标是 (x, y, z).
(1) 考虑切向量场

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

设 $f(x,y,z)=xyz$, 分别求

$$X(f), \quad XY(f), \quad [X,Y](f),$$

这里 $[X,Y]$ 是李括号算子.

(2) 对任意的光滑切向量场 X,Y,Z, 请直接用李括号的定义, 证明雅克比恒等式:

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

四、(20 分)考虑以下几类实平面中的子集:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \\ M_2 &= \{(x,y) \mid xy=0\} \\ M_3 &= \{(x,y) \mid x^2+y^2\neq 0\} \\ M_4 &= \{(x,y) \mid y=\mid x \mid\}. \end{aligned}$$

(1) 指出哪一些子集, 在通常拓扑下是拓扑流形? 哪些不是? 请说明理由. 对于是流形的那些集合, 请指出它们的维数, 并分别给出它们的一组局部坐标卡;

(2) 上面的那些拓扑流形中,有哪些是微分流形? 哪些不是? 对于不是微分流形的情形, 请简要说明理由.

五、(共 20 分)设 $\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 是扩充复平面.
(1) 考虑集合 $T=\{(z,w) \mid w^2=z,\ w,z\in\bar{\mathbb{C}}\}$. 试利用支割线及粘合单值分支的方法, 说明 T 是同胚于球面的黎曼曲面.

(2) 假设 C 是由方程 $y^2=x^3-3x+\lambda$ 定义的复代数曲线. 证明: C 是光滑曲线当且仅当 $\lambda=\pm 2$.

(3) 对上述的 C, 假设 $\lambda^2\neq 4$, 试求它作为黎曼曲面的亏格 g.

六、(15 分, **可选附加题**) 设 $V=\mathbb{R}^n$ 是 n 维线性空间, 考虑 V 中全体 k 维线性子空间构成的集合:

$$Gr(k,n)=\{W\subseteq V \mid \dim W=k\}.$$

该集合称为格拉斯曼流形.

(1) 试验证 $Gr(1,3)$, $Gr(2,3)$ 是流形, 并指出它们的维数.

(2) 请问这两个流形之间有何关系? 请简要说明理由. (提示: 考虑直线平面方程及其法向量之间的关系)