《Hodge 理论选讲》试题

June 4, 2009

试题1 (40 分). 设 C_λ 是由方程 $y^2 - x(x-1)(x-\lambda) = 0$ 定义的椭圆曲线参数簇($\lambda \in \mathbb{C}$).
(1) 证明 $H^1(C_\lambda, \mathbb{C})$ 有 Hodge 分解 ($\lambda \neq 0, 1$).

$$H^1(C_\lambda, \mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$
$$H^{1,0} = \overline{H^{0,1}}.$$

(2) 在此情形下, 简述周期映射的概念, 并解释它与周期 $\tau(\lambda)$ 的关系.
(3) 在此情形下, 解释 Gauss-Manin 联络的概念, 以及 infinitesimal Torelli 定理.

试题2 (30 分). 设 X 是紧复流形, E 是 X 上秩为 r 的全纯向量丛. $A^{0,q}(E)$ 是向量丛 $\Omega_X^{0,q} \bigotimes_{\mathbb{C}} E$ 之 $\mathcal{C}^\infty$ 截面生成的空间.
(1) 证明 $\overline{\partial}_E : A^{0,q}(E) \to A^{0,q+1}(E)$ 之定义与向量丛的局部标架选取无关.
(2) 证明 $\overline{\partial}_E^2 = 0$, 并简述上同调群 $H^q(X, E)$ 的定义.

试题3 (30 分). 设 X 是紧复代数曲面, L 是 X 上全纯线丛, h 是 L 的 Hermitian 度量.
(1) 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 上的开覆盖, 使得 $L\,|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}$. 考虑截面 $\sigma = \{\sigma_i\}_{i\in I}$, 记 $h_i = h(\sigma_i, \sigma_i)$, $\omega_i = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\partial\overline{\partial}\log h_i$.
证明: $\omega = \{\omega_i\}_{i\in I}$ 定义了 X 上整体的实 $(1,1)$ 形式(即 Chern form).
(2) 利用指数正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

证明: $\mathrm{Im}(c_1) \cong H^{1,1}(X) \bigcap H^2(X, \mathbb{Z})$, 这里 $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ 是由上述方式定义的 Chern 映射.