2007届博士研究生学位论文

学校代号: 10269

学号: 52040601011



三点式纤维化的整体不变量

院　　系:	理工学院数学系
专业名称:	基　础　数　学
研究方向:	代　数　几　何
指导教师:	谈胜利　教授
指导教师:	陈志杰　教授
博士研究生:	陆　　俊
学　　号:	52040601011

二〇〇七年四月

Global Invariants of Trigonal Fibrations

A dissertation submitted to
East China Normal University (10269)
for the degree of Doctor of Science
in the Faculty of Science and Engineering

April, 2007

By

Jun Lu (52040601011)

Prof. Zhijie Chen (Supervisor)

Prof. Sheng-Li Tan (Supervisor)

学位论文独创性声明

本人所呈交的学位论文是在我导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果. 据我所知, 除文中已经引用的内容外, 本论文不包含其他个人已经发表或撰写的研究成果. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在本文中作了明确的说明并表示谢意.

作者签名:_____ 日期:_____

学位论文使用授权声明

本人完全了解华东师范大学有关保留、使用学位论文的规定, 学校有权保留学位论文并向国家主管部门或指定机构送交论文的电子版和纸质版.有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅. 有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索. 有权将学位论文的标题和摘要出版.保密的学位论文在解密后适用本规定.

学位论文作者签名 : _____ 导师签名 : _____

日　　期 : _____ 日　　期 : _____

陆俊博士学位论文答辩委员会成员名单

姓名	职称	单位	备注
			主席

摘　要

寻找代数曲面的不变量之间的关系是代数几何的重要问题. 计算带有纤维化的曲面的不变量等价于计算纤维化的相对不变量. 对于直纹面和椭圆纤维化以及超椭圆纤维化的不变量, 人们已有有效的计算方法. 非超椭圆纤维化的不变量计算是代数几何中未解决的问题. 而三点式 (Trigonal) 纤维化是非超椭圆纤维化中最简单的情形. 例如亏格 3 和亏格 4 非超椭圆纤维化都是三点式纤维化.

经过一个基变换后, 三点式纤维化曲面都有一个到直纹面的三次覆盖, 因此我们可以利用三次覆盖理论来计算不变量. 我们可以从一个几何直纹面上的三次覆盖出发, 并且利用典范解消来解消曲面上的奇点. 这时我们就有公式来计算光滑曲面的不变量. 为了回到原始曲面, 我们还得收缩纤维中的 (-1)-曲线. 因此主要问题就是计算典范解消产生的垂直 (-1)-曲线的条数. 对三次覆盖来说, 这是一个未解决的问题.

对于二次覆盖, 类似的问题被 E. Horikawa [19] 和肖刚 [61] 解决. 他们将分歧轨迹中的奇点分为两类, 并且对每一类奇点都有公式计算这种 (-1)-曲线的条数.

对于三次覆盖, 我们找到分歧轨迹奇点的一种数值分类. 我们将奇点分为 9 类, 并且对每一类奇点, 我们也知道典范解消产生的垂直 (-1)-曲线的条数. 这样我们就得到了原始曲面的不变量. 如果把我们的方法应用于二次覆盖, 那么我们也可以得到 E. Horikawa 和肖刚的结果.

作为应用, 结合陈志杰和谈胜利 [12] 的研究结果, 我们得到了亏格 3 半稳定非超椭圆纤维化的不变量计算公式. 从而我们解决了 M. Reid [46] 于 1990 年提出的猜想. 对任意亏格的三点式纤维化, 我们得到了它的斜率的上界, 推广了陈志杰和谈胜利的相关结果.

此外, 对任意次覆盖的分歧轨迹的奇点, 我们也有类似的数值分类 [36].

关键词. 三点式纤维化, 三次覆盖, 典范解消, 斜率, Horikawa 数

Abstract

To find out the relation among the invariants of an algebraic surface is an important problem in algebraic geometry. The computation of the invariants of fibred surfaces is equivalent to that of the relative invariants of the fibrations. There are effective methods to compute the invariants of surfaces with a ruling, elliptic fibration or hyperelliptic fibration. However, it is still an open problem to compute the invariants of a non-hyperelliptic fibration. Trigonal fibrations are the simplest cases of non-hyperelliptic fibrations. For example, genus 3 or 4 non-hyperelliptic fibrations are trigonal.

Up to a base change, the surface of a trigonal fibration admits a generically triple cover over some ruled surface, so we can use the theory of triple covers to compute the invariants. We start from a triple cover over a geometric ruled surface, and use the canonical resolution to resolve the singularities of the covering surface. Then we have formulas for the computation of invariants of the smooth surface. In order to go back to our original surface, we have to contract the (-1)-curves in the fibers. Hence, the main problem is to count the number of vertical (-1)-curves coming from the canonical resolution. However, for triple covers, this is an open problem.

For double covers, the similar problem is solved by E. Horikawa [19] and G. Xiao [61]. They divide the singular points of the branch locus into two types, and for each type, they have formulas to compute this number.

For triple covers, we find a numerical classification of the singularities of the branch locus. We divide the singularities into 9 types, and for each type we know also the number of vertical (-1)-curves coming from the canonical resolution. As a consequence, we get the invariants of the original surface. In particular, if we apply the method to double covers, then we get also Horikawa and Xiao's result.

As an application, we obtain the computation formulas for the invariants of a semi-stable non-hyperelliptic fibration of genus 3 based on the joint work of Z.-J. Chen and S.-L. Tan [12]. As a consequence, we solve M. Reid's conjecture [46] proposed in 1990. For a trigonal fibration of higher genus, we get upper bounds on its slope, which improves similar results of Z. Chen and S.-L. Tan.

Furthermore, for n-tuple covers, we have a similar numerical classification of the singularities of branch locus.

Key words. trigonal fibration, triple cover, canonical resolution, slope, Horikawa's number

目 录

第一章 引言 1

1.1 研究背景 1

1.2 主要结果 4

第二章 三次覆盖基本理论 7

2.1 三次覆盖数据 7

2.2 典范解消 8

2.3 不变量计算公式 8

第三章 奇点的数值分类 10

3.1 分歧轨迹奇点的数值分类 10

3.2 奇点解消产生的 (-1)-曲线的数值分析 13

第四章 三点式纤维化的预备知识 17

4.1 稳定约化的数值不变量 17

4.2 三次覆盖的规范模型 20

4.3 相对分歧指数 21

第五章 奇异性指数 23

5.1 奇异性指数 23

5.2 计算典范解消产生的 (-1)-曲线条数 27

第六章 几个引理的证明 29

6.1 一些记号说明 29

6.2 引理 5.1 的证明 30

6.3 引理 5.2 的证明 32

第七章 半稳定纤维化的不变量 35

7.1 亏格 3 纤维化的不变量 35

7.2 一般情形的不变量公式 39

第八章 三点式纤维化的斜率上界 42

第九章 n 次覆盖奇点的数值分类 45

9.1 n 次覆盖的奇点解消 45

9.2 分歧轨迹奇点的数值分类 45

参考文献 48

攻读博士学位期间的研究成果 53

致谢 54

第一章　引言

1.1　研究背景

设 $f : S \to C$ 是亏格 $g(\geq 2)$ 纤维化, 也就是从光滑复射影曲面 S 到亏格 b 的光滑射影曲线 C 的全纯映射, 它的纤维是连通的. g 是一般纤维的亏格. 我们总假设 S 是相对极小的, 即纤维中不含 (-1)-曲线. 按曲线论的观点, 我们知道, 曲线到 $\mathbb{P}^1$ 上的覆盖的最小次数 d 是曲线的重要不变量. $d = 2$ 时称为超椭圆的. $d \geq 3$ 称为非超椭圆. 特别地, $d = 3$ 称为三点式的(Trigonal). 按照一般纤维的相应性质, 纤维化可分为超椭圆, 非超椭圆和三点式等等.

根据代数曲面 S 的特殊性质, 寻找曲面的基本不变量 $c_1^2(S) = K_S^2$, $c_2(S) = \chi_{\text{top}}(S)$, $\chi(\mathcal{O}_S)$ 之间的关系, 是代数几何中的基本问题. 对于带有纤维化的曲面, 我们等价于研究三个相对不变量之间的关系.

$$\begin{aligned} K_f^2 &= K_{S/C}^2 = K_S^2 - 8(g-1)(b-1), \\ \chi_f &= \chi(\mathcal{O}_S) - (g-1)(b-1), \\ e_f &= \chi_{\text{top}}(S) - 4(g-1)(b-1). \end{aligned}$$

当 S 相对极小时, 这些量是非负整数. 它们满足 Noether 公式 $K_f^2 + e_f^2 = 12\chi_f$.

当 $g \geq 2$ 时, $K_f^2 = 0$ 当且仅当 $\chi_f = 0$, 也当且仅当纤维化是局部平凡的, 即所有纤维同构. 而 $e_f = 0$ 当且仅当所有纤维光滑, 即没有奇异纤维. 特别地, 如果 $e_f = 0$ 且 $\chi_f \neq 0$, 那么就称这种纤维化为 Kodaira 纤维化.

e_f 的计算是一个拓扑问题. 它可以归结为奇异纤维 F_1, F_2, $\cdots$, F_s 相应的不变量的计算. 具体地讲, 我们有 $e_f = \sum\limits_i e_{F_i}$，其中 $e_{F_i} = \chi_{\text{top}}(F_i) - (2-2g)$. 利用谈胜利 [49] 的计算公式, 则有

$$e_{F_i} := 2(g - p_a(F_{i,\text{red}})) + \mu(F_{i,\text{red}}),$$

其中 $F_{i,\mathrm{red}}$ 是 F_i 的支集, $\mu(F_{i,\mathrm{red}}) = \sum_{p\in F_i} \mu_p(F_i)$ 是 F_i 上所有奇点的 Milnor 数之和.

当 $g = 0$ 时, 没有奇异纤维, S 是直纹面, 此时我们有 $K_f^2 = \chi_f = e_f = 0$. 等价地, 我们有

$$\begin{aligned} K_S^2 &= 8(g-1)(b-1), \\ \chi(\mathcal{O}_S) &= (g-1)(b-1), \\ \chi_{\mathrm{top}}(S) &= 4(g-1)(b-1). \end{aligned}$$

当 $g = 1$ 时, f 称为椭圆纤维化, S 称为椭圆曲面. 此时 $K_f^2 = 0$, $\chi_f = \frac{1}{12}e_f$. 等价地, 我们有

$$K_S^2 = 0, \quad \chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}\chi_{\mathrm{top}}(S).$$

在这种情形, 小平邦彦 (Kodaira) [24] 将奇异纤维分为 11 类. 通过计算每一类奇异纤维对不变量的影响值, 就可以得到不变量的计算公式.

当 $g = 2$ 时, 为了计算不变量, 很多人试图仿照 Kodaira 的方法对奇异纤维分类. 例如 Ogg [42], Namikawa-Ueno [40, 41] 等人将奇异纤维分为两百多类. 人们很快发现通过这种方法研究不变量之间的关系是不可行的.

因为亏格 2 纤维化是超椭圆纤维化, 其相对典范映射给出了它到一个相对极小直纹面的二次覆盖. Horikawa [19] 在 1977 年利用二次覆盖的方法成功地将奇异纤维分为五类, 从而得到不变量的计算公式.

肖刚 [58] 不是通过分类奇异纤维, 而是将二次覆盖奇点分为两类, 最终得到了亏格 2 纤维化的优美的不变量计算公式 (也可见 [61]).

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \frac{1}{5}s_2 + \frac{7}{5}s_3, \\ \chi_f &= \frac{1}{10}s_2 + \frac{1}{5}s_3, \\ e_f &= s_2 + s_3, \end{aligned}$$

这里 s_2, s_3 是所谓的奇异性指数. 在半稳定情形, s_2 表示纤维中不可分离点的个数, s_3 表示可分离点的个数. 一个点叫做不可分离点, 如果去掉该点后纤维仍然连通.

进一步, 肖刚 [61] 对于任意亏格的超椭圆纤维化, 都给出了不变量的计算公式. 比如 $g=3$ 时, 有

$$K_f^2=\frac{2}{7}s_2+\frac{17}{7}s_3+\frac{10}{7}s_4+\frac{20}{7}s_5,$$
$$\chi_f=\frac{3}{28}s_2+\frac{2}{7}s_3+\frac{2}{7}s_4+\frac{1}{14}s_5.$$

对于非超椭圆纤维化, 由于二次覆盖方法不能用, 所以不变量的计算一直是一个未解决的问题.

当 $g=3$ 时, 很多人试图寻找其他方法来计算不变量. E. Viehweg [55] 希望用 Weierstrass 点的方法来计算. E. Horikawa [19] 等证明了 $K_f^2\geq 3\chi_f$.

M. Reid 和肖刚试图用原子纤维(Atomic fibre) 的方法来计算不变量. 他们将原子纤维分为四类. 所谓原子纤维就是不能通过形变而变成一些更加简单的奇异纤维. M. Reid [46] 于 1990 年猜测不变量公式为

$$\chi_f=\frac{1}{9}(s_0+s_1+3s_2+5s_3),$$
$$K_f^2=\frac{1}{3}(s_0+4s_1+9s_2+14s_3),$$
$$e_f=s_0+s_2+2s_3,$$

此处 s_i 是第 (i) 型原子纤维的个数(见 § 7.1).

对 $g\geq 4$ 非超椭圆纤维化, 人们只能知道一些不等式关系. 为此, 当 $\chi_f\neq 0$ 时, 肖刚 [57] 定义纤维化的斜率 $\lambda_f=K_f^2/\chi_f$, 并证明了

$$\lambda_f\geq 4-4/g.$$

对小亏格的非超椭圆纤维化, 有以下一些结果:

$$\lambda_f\geq\begin{cases}3, & g=3,\ \text{E. Horikawa [21] 和[27] ;}\\ 24/7, & g=4,\ \text{Z. Chen [11] 和K. Konno [28];}\\ 4, & g=5,\ \text{K. Konno [28] ;}\\ 96/25, & g=6,\ \text{K. Konno [29] .}\end{cases}$$

Stankova-Frenkel [47] 证明了对于半稳定三点式纤维化, 有

$$\lambda_f \geq \frac{24(g-1)}{(5g+1)}.$$

因为亏格 3 和亏格 4 非超椭圆纤维化都是三点式纤维化, 经过基变换后有一个到直纹面的三次覆盖. 陈志杰和谈胜利试图利用三次覆盖来研究不变量计算问题. 这也是研究三次覆盖的目的之一. 特别地, 他们 [12] 通过对三次覆盖分歧轨迹的奇点的分析, 得到了斜率上界的估计.

$$\lambda_f \leq \begin{cases} 9, & \text{如果 } \alpha = 3,\ 4,\ 5, \\ 21/2, & \text{如果 } \alpha = 2. \end{cases}$$

其中 α 是纤维化的不变量 (见 § 4.1). 因此Kodaira 纤维化 (即满足 $\lambda_f = 12$ 的纤维化) 只可能出现在$\alpha \leq 1$ 的情形. 他们进一步得到了任意亏格的三点式纤维化的斜率上界估计. 其中的关键之处是估计典范解消曲面产生的 (-1)-曲线条数.

对超椭圆情形, 肖刚也有类似的研究. 他 [61] 证明了

$$\lambda_f \leq \begin{cases} 12 - \frac{(8g+4)}{g^2}, & g \text{ 是偶数}, \\ 12 - \frac{(8g+4)}{g^2-1}, & g \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

1.2 主要结果

利用我们对 (-1)-曲线条数的计算, 结合陈志杰和谈胜利的研究, 我们可以得到任意亏格的半稳定三点式纤维化的不变量计算公式 (见 § 7.2). 特别地, 我们得到 $g = 3$ 时的不变量公式.

定理 1.1

$$\begin{aligned} K_f^2 =& \frac{1}{3}s_0 + \frac{4}{3}s_1 + 3s_2, \\ \chi_f =& \frac{1}{9}s_0 + \frac{1}{9}s_1 + \frac{1}{3}s_2, \\ e_f =& s_0 + s_2, \end{aligned}$$

其中 s_0 是纤维中不可分离点的个数, s_2 是可分离点的个数, s_1 是超椭圆纤维的个数.

对非半稳定情形, 我们可以利用稳定约化 $\pi : \tilde{C} \to C$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \longrightarrow & S \\ {\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \tilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

由谈胜利 [51] 的计算公式, 我们有($d = \deg \pi$)

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \frac{K_{\tilde{f}}^2}{d} + \sum_F c_1^2(F), \\ e_f &= \frac{e_{\tilde{f}}}{d} + \sum_F c_2(F), \\ \chi_f &= \frac{\chi_{\tilde{f}}}{d} + \sum_F \chi_F. \end{aligned}$$

这里 $c_1^2(F)$, $c_2(F)$, χ_F 都是奇异纤维 F 的非负不变量. 它们为 0 当且仅当 F 半稳定.

进一步, 对原子纤维都可以验证 M. Reid 猜想是正确的. 对第 (3) 型的原子纤维, $F = 2C$, 其中 C 是光滑超椭圆曲线, 这时经过 $d(= 2)$ 次基变换, 就变成了亏格 3 超椭圆纤维, 且有 $c_1^2(F) = 4$, $c_2(F) = 2$. 这种奇异纤维对不变量的影响值恰好与 M. Reid 的猜想公式吻合.

如前所述, 计算的难点在于确定三次覆盖典范解消曲面的 (-1)-曲线条数. 在二次覆盖时, 这种典范解消曲面上产生的 (-1)-曲线条数问题被 E. Horikawa [19] 和肖刚 [61] 解决. 他们将分歧轨迹中的奇点分为两类. 为了解决三次覆盖典范解消产生的 (-1)-曲线条数问题, 我们发现了分歧轨迹的奇点分类的数值判别方法. 我们利用它将三次覆盖分歧轨迹的奇点分为九类. 然后我们可以对每一类奇点计算 (-1)-曲线条数. 因此我们最终得到三点式纤维化曲面的不变量计算公式.

对于 n 次覆盖的分歧轨迹的奇点, 我们也有类似的数值分类 (见 [36]). 按照这种分类, 我们也可以分析由覆盖曲面的奇点解消所产生的 (-1)-曲线. 我们将在第九章中简单介绍这些内容.

作为应用, 我们将估计亏格 $g(\geq 4)$ 的三点式纤维化的斜率上界 (见 [13]).

定理 1.2　设$g \geq 4$ 且 $\alpha \geq 2$. 我们有

$$\lambda_f \leq 12 - \frac{24(\alpha-1)\alpha}{\alpha g(g+3\alpha-6)-2r},$$

这里 $r = r(\alpha, g)$ 是依赖于 α 和 g 的值 (见 § 4.1). 特别当 $\alpha = g+2$ 时, 我们有

$$\lambda_f \leq \begin{cases} 12 - \frac{6(g+1)}{g^2}, & g \text{ 是偶数}, \\ 12 - \frac{6}{g-1}, & g \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

这样 Kodaira 纤维化只可能出现在 $\alpha \leq 1$ 的情形.

本文的内容安排如下:

在第二章中, 我们回顾一下三次覆盖的基本概念和结论. 我们将介绍三次覆盖的奇点解消以及三次覆盖不变量的计算公式.

在第三章中, 利用三次覆盖的典范解消, 我们可以对三次覆盖的分歧轨迹奇点进行一种有效的数值分类. 利用这种分类方法, 我们对奇点的典范解消引入的 (-1)-曲线做了一个数值分析. 此外我们还计算了分歧轨迹奇点的 Horikawa 数.

在第四章中，我们首先介绍了一些基变换方面的结论. 进一步, 我们可以将三次覆盖的分岐轨迹取成所谓的规范模型 (见 § 4.2). 最后, 我们计算了直纹面上水平曲线的相对分歧指数.

在第五章中, 利用数值分类方法, 我们给出了每一类奇点的典范解消图, 定义了奇异性指数.然后数精确地计算出由典范解消引入的 (-1)-曲线的条数.

在第六章中, 我们首先证明了 $\alpha \geq 2$ 时, 纤维中没有额外收缩的 (-1)-曲线, 计算了 $\alpha \leq 1$ 时的额外收缩曲线的条数. 然后我们讨论了分歧轨迹中的例外除子在三次覆盖下的拉回什么时候提供 (-1)-曲线.

在第七章中, 我们利用奇异性指数精确计算出三点式纤维化的不变量, 特别地, 我们得到了亏格 3 非超椭圆纤维化的不变量计算公式, 从而证明了定理 1.1.

在第八章中, 我们证明了定理 1.2.

在第九章中, 我们简单讨论了 n 次覆盖的分歧轨迹奇点的数值分类. 利用这种分类可以分析奇点解消中引入的 (-1)-曲线.

第二章　三次覆盖基本理论

三次覆盖的理论最早由 R. Miranda [39] 系统地研究. 谈胜利 [52, 53]从三次扩张的整闭包理论出发, 进一步发展了三次覆盖理论. 在曲面情形, 谈胜利证明了曲面的三次覆盖奇点有典范解消 (见 § 2.2). 以下我们简单回顾这些内容.

2.1　三次覆盖数据

设 P_0 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的光滑代数曲面, $\pi : S_0 \to P_0$ 是一个正规三次覆盖. 所谓三次覆盖数据就是这样一些截面构成的三元组 $(s, t, \mathcal{L})$, 此处 $\mathcal{L}$ 是 P_0 上的可逆层, $s \in H^0(P_0, \mathcal{L}^2)$ 和 $t \in H^0(P_0, \mathcal{L}^3)$ 都是截面 ($t \neq 0$). S_0 就是在线丛 $\mathcal{L}$ 中由方程 $z^3 + sz + t = 0$ 所定义的曲面的正规化. 任何三次覆盖 π 总是被某个三次覆盖数据 $(s, t, \mathcal{L})$ 唯一确定. 如果 $s = 0$, 那么这个三次覆盖是伽罗华覆盖, 所有的事情都是熟知的. 读者可以参考 [48]. 因此以下我们总假设 $s \neq 0$. 设

$$a = \frac{4s^3}{\gcd(s^3, t^2)}, b = \frac{27t^2}{\gcd(s^3, t^2)}, c = \frac{4s^3 + 27t^2}{\gcd(s^3, t^2)}.$$

那么 a, b 和 c 是某个可逆层中两两互素的截面, 满足 $a + b = c$.

反过来, 任何满足 $a + b = c$ 的两两互素三元组 (a, b, c) 都可以唯一确定 P_0 上的一个三次覆盖. 假设我们有一个分解(对应于它们的除子分解)

$$a = 4a_1a_2^2a_0^3, \quad b = 27b_1b_0^2, \quad c = c_1c_0^2,$$

此处 a_1, a_2, b_1, c_1 无平方因子, 且 $\gcd(a_1, a_2) = 1$. 于是数据 (s, t) 被 (a, b, c) 唯一确定:

$$s = a_1a_2^2b_1a_0, \quad t = a_1a_2^2b_1^2b_0.$$

相应的除子记为

$$A_i = \mathrm{Div}(a_i), \quad B_i = \mathrm{Div}(b_i), \quad C_i = \mathrm{Div}(c_i).$$

设 $D_1 = B_1 + C_1$, $D_2 = A_1 + A_2$. 分歧轨迹除子就是 $R = 2D_2 + D_1$. π 在 $D_2 = A_1 + A_2$ 是全分歧的, 因此 D_2 被称为全分歧轨迹; D_1 被称为一般分歧轨迹, 它是偶除子. 层 (trace-free subsheaf), 于是有 $c_1(\mathcal{E}_\pi) = -\frac{R}{2}$. S_0 是光滑曲面当且仅当 D_2 光滑, D_2 与 D_1 没有公共交点, 且 D_1 所有奇点都是 good cusps 点, 即可以局部解析地定义为 $y^2 + f(x,y)^3 = 0$, $f(0,0) = 0$, 并且 π 在这种点上是全分歧的.

2.2 典范解消

S_0 上所有奇点的典范解消 $\tau : \tilde{S} \to S_0$ 来自下面的交换图.

$$\begin{array}{ccccccccc} \tilde{S} = S_k & \xrightarrow{\tau_k} & \cdots\cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{\tau_2} & S_1 & \xrightarrow{\tau_1} & S_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}=\pi_k} & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0=\pi} \\ \tilde{P} = P_k & \xrightarrow{\sigma_k} & \cdots\cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & P_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & P_0 \end{array} \tag{2-1}$$

(1) σ_{i+1} 是 P_i 在 π_i 的分歧轨迹奇点 p_i 处的爆发(Blowing-up). S_{i+1} 是 $P_{i+1} \times_{P_i} S_i$ 的正规化. $\tilde{\pi} = \pi_k$ 有光滑的分歧轨迹. 因此 $\tilde{S} = S_k$ 是光滑的.

(2) π_i 对应的三次覆盖数据 $(a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)})$ 可以通过消去下式中的公共因子得到.

$$(\sigma_i^* a^{(i-1)}, \sigma_i^* b^{(i-1)}, \sigma_i^* c^{(i-1)})$$

2.3 不变量计算公式

设 $d_i = \min\{m_{p_i}(A^{(i)}), m_{p_i}(B^{(i)}), m_{p_i}(C^{(i)})\}$, 此处 $m_p(D)$ 除子 D 在 p处的重数.

设

$$m_i = \left[\frac{m_{p_i}(D_1^{(i)})}{2} \right], \tag{2-2}$$

$$n_i = \begin{cases} m_{p_i}(D_2^{(i)}), & \text{if } d_i \equiv m_{p_i}(D_2^{(i)}) \pmod 3; \\ m_{p_i}(D_2^{(i)}) - 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2-3}$$

$$w_i = m_i + n_i.$$

设 E_i 是 σ_i 的例外曲线, 且 $\mathcal{E}_{i+1}$ 是 E_i 在 $\tilde{P}$ 中的完全原像. 设 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k : \tilde{P} \to P_0$. 通过计算, 我们得到 $\tilde{\pi}$ 的分歧轨迹

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 =& \sigma^*(D_1) - 2\sum_{i=0}^{k-1} m_i \mathcal{E}_{i+1}, \\ \tilde{D}_2 =& \sigma^*(D_2) - \sum_{i=0}^{k-1} n_i \mathcal{E}_{i+1}. \end{aligned} \tag{2-4}$$

因为 $\tilde{D}_1\tilde{D}_2 = 0$, 由公式(2-4), 我们有

$$D_1 D_2 = 2\sum_{i=0}^{k-1} m_i n_i. \tag{2-5}$$

现在我们得到三次覆盖的不变量公式:

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) =& 3\chi(\mathcal{O}_{P_0}) + \frac{1}{8}D_1^2 + \frac{1}{4}D_1K_{P_0} + \frac{5}{18}D_2^2 + \frac{1}{2}D_2K_{P_0} \\ & - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{m_i(m_i-1)}{2} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n_i(5n_i-9)}{18}, \end{aligned} \tag{2-6}$$

$$\begin{aligned} K_{\tilde{S}}^2 =& 3K_{P_0}^2 + \frac{1}{2}D_1^2 + 2D_1K_{P_0} + \frac{4}{3}D_2^2 + 4D_2K_{P_0} \\ & - \sum_{i=0}^{k-1} 2(m_i-1)^2 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4n_i(n_i-3)}{3} - k. \end{aligned} \tag{2-7}$$

分歧轨迹奇点 p 的 Horikawa 数被定义为

$$H_p = \frac{1}{2}\sum_i (2-w_i)(w_i-3) + \varepsilon_p, \tag{2-8}$$

此处 $\sum_i$ 跑遍 p 的所有无穷接近奇点.

第三章　奇点的数值分类

设 $\pi : S_0 \to P_0$ 是一个三次覆盖, $\tilde{\pi} : \tilde{S} \to \tilde{P}$ 是 π 的典范解消. 我们仍然沿用上一节的记号和概念.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{S} = S_k & \xrightarrow{\tau_k} & \cdots\cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{\tau_2} & S_1 & \xrightarrow{\tau_1} & S_0 \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}=\pi_k} & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0=\pi} \\
\tilde{P} = P_k & \xrightarrow{\sigma_k} & \cdots\cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & P_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & P_0
\end{array}$$

设 $p \in P_0$ 是 π 的全分歧的分歧轨迹奇点. 设 Z 是支集在 $\mathrm{supp}(\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1)$ 上的基本闭链.

3.1　分歧轨迹奇点的数值分类

设 $A = \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1 - Z$. 为了书写方便, 我们记 $W = \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1$. 我们用 $\forall C_i \leq W$ 表示 W 中任何不可约分支. 其余各处出现的类似写法不再一一说明.

因为 $WC_i \leq 0$, $\forall C_i \leq W$, 所以由基本闭链的极小性可知 $A \geq 0$. 如果 $A \neq 0$, 那么 $-3 = W^2 = Z^2 + A^2 + 2AZ \leq -2 + 2AZ$. 因此 $AZ = 0$ 且 $A^2 \geq -2$.

设 Z_A 是支集在 A 上的基本闭链, $B = A - Z_A$. 由于 $AC_i = WC_i \leq 0$, $\forall C_i \leq A$, 所以由基本闭链的极小性可知 $B \geq 0$. 如果 $B = 0$, 那么 $W = Z + Z_A$. 如果 $B \neq 0$, 那么 $-2 \leq A^2 = Z_A^2 + B^2 + 2Z_AB \leq -2 + 2Z_AB$, 因此 $Z_AB = 0$ 并且 $Z_A^2 = B^2 = -1$.

因为 $BC_i = AC_i \leq 0$, $\forall C_i \leq B$, 由基本闭链的极小性可知 $D = B - Z_B \geq 0$. 这里 Z_B 是支集在 B 上的基本闭链. 假设 $D \neq 0$, 那么 $-1 = B^2 = D^2 + Z_B^2 + 2DZ_B \leq -2$, 矛盾. 因此必有 $B = Z_B$.

这样我们实际上就得到了 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1$ 的唯一分解.

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1 &= Z_1 + Z_2 + Z_3, \\
Z_1 &> Z_2 \geq Z_3 \geq 0, \\
Z_iZ_j &= 0, \quad i \neq j.
\end{aligned} \tag{3-1}$$

如果 $Z_i \neq 0$, 那么 $\mathrm{supp}(Z_i)$ 是连通负定曲线, 且 Z_i 是支集在 $\mathrm{supp}(Z_i)$ 上的基本闭

链.

为了叙述方便, Z_i 被称为分歧轨迹奇点 p 的 i-th 基本闭链.

对二次覆盖的奇点, 我们也有类似的分解: $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1 = Z_1 + Z_2$. 现在回到三次覆盖的情形. 我们考虑 π 的一般分歧的分歧轨迹奇点 p. 此时, $\pi^{-1}(p)$ 由一个二次覆盖奇点和一个光滑点组成. $\pi^{-1}(p)$ 中的光滑点在典范解消曲面中的例外集是第一类有理曲线 (见 [4]), 其所对应的的基本闭链记为 Z_3. 这样我们也有唯一分解 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1 = Z_1 + Z_2 + Z_3$.

于是在典范解消中, 对 π_i 的分歧轨迹奇点 p_i, 我们有

引理 3.1　*假设 p_i 是 π_i 的分歧轨迹奇点, 那么 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}$ 有如下的唯一分解.*

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} &= Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)} + Z_3^{(i)}, \\ Z_1^{(i)} &> Z_2^{(i)} \geq Z_3^{(i)} \geq 0, \\ Z_k^{(i)} Z_l^{(i)} &= 0, \quad k \neq l. \end{aligned} \tag{3-2}$$

如果 $Z_k^{(i)} \neq 0$, 那么 $\mathrm{supp}(Z_k^{(i)})$ 是连通负定曲线, 且 $Z_k^{(i)}$ 是支集在 $\mathrm{supp}(Z_k^{(i)})$ 上的基本闭链.

因为 $-3 = (\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1})^2 = (Z_1^{(i)})^2 + (Z_2^{(i)})^2 + (Z_3^{(i)})^2$, 所以 $-3 \leq (Z_1^{(i)})^2 \leq -1$.

又因为 $Z_1^{(i)} \geq Z_2^{(i)}$, 故 $(Z_1^{(i)})^2 = \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}Z_1^{(i)} \leq \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}Z_2^{(i)} = (Z_2^{(i)})^2$. 同理, 如果 p_i 是全分歧的奇点, 那么我们有 $(Z_2^{(i)})^2 \leq (Z_3^{(i)})^2$. 如果 p_i 是一般分歧的, 那么由前面 $Z_3^{(i)}$ 的定义, 我们有 $(Z_3^{(i)})^2 = -1$.

注意到 $Z_1^{(i)}$ 是奇点解消例外集上的基本闭链, 所以 $(Z_1^{(i)})^2$ 和解消方式无关, 是奇点的不变量. 按照下面的分类讨论, 很容易看到 $(Z_2^{(i)})^2$ 和$(Z_3^{(i)})^2$ 都不依赖于解消, 因此我们可以认为这是分歧轨迹奇点的不变量, 它只和覆盖 π_i 的局部性质有关.

按照上面的讨论我们可以将每一类分歧轨迹奇点 p_i 归结为下列几种情形.

Case 1. $(Z_1^{(i)})^2 = -1$.

由上讨论, 显然有 $(Z_2^{(i)})^2 = (Z_3^{(i)})^2 = -1$.

如果 p_i 是全分歧的分歧轨迹奇点, 那么 $Z_2^{(i)} \geq Z_3^{(i)}$. 设 $C_1 \leq Z_3^{(i)}$ 满足 $Z_3^{(i)}C_1 < 0$. 因为 $Z_3^{(i)}$ 是它本身支集上的基本闭链, 并且 $(Z_3^{(i)})^2 = -1$, 所以 $Z_3^{(i)}C_1 = -1$. 又因为 $Z_j^{(i)} \leq Z_k^{(i)}$ 且 $Z_j^{(i)}Z_k^{(i)} = 0$ $(j > k)$, 所以 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}C_1 = -3$ 且 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} \geq 3C_1$. 这就推出 $\tilde{\pi}^*E_{i+1} = 3C_1$, 也就是说, E_{i+1} 落在全分歧轨迹里. 这 E_{i+1} 就是爆发 σ_{i+1} 所对应的例外曲线.

如果 p_i 是一般分歧的分歧轨迹奇点, 那么通过类似的讨论, 我们知道 E_{i+1} 落在一般分歧轨迹中. 设 $\tilde{\pi}^*E_{i+1} = 2C_1 + C_2$. 我们则有$Z_2^{(i)}C_1 = -1$ 以及 $Z_3^{(i)}C_2 = -1$.

Case 2. $(Z_1^{(i)})^2 = -2$.

如果 p_i 是全分歧的, 那么 $(Z_2^{(i)})^2 = -1$ 且 $Z_3^{(i)} = 0$. 设 $C_1 \leq Z_2^{(i)}$ 满足 $Z_2^{(i)}C_1 < 0$. 因为 $Z_2^{(i)}$ 是本身支集上的基本闭链, 并且 $(Z_2^{(i)})^2 = -1$, 所以 $Z_2^{(i)}C_1 = -1$. 由于 $Z_2^{(i)} \leq Z_1^{(i)}$ 且 $Z_1^{(i)}Z_2^{(i)} = 0$, 所以 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}C_1 < 0$ and $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} \geq 2C_1$. 这就推出 E_{i+1} 落在分歧轨迹里. 假如 E_{i+1} 是全分歧 (相应的, 一般分歧) 的例外分支, 那么 C_1 在 $Z_1^{(i)}$ 中的重数恰好是 2 (相应的, 1).

如果 p_i 是一般分歧的分歧轨迹, 那么 $(Z_3^{(i)})^2 = -1$ 且 $Z_2^{(i)} = 0$. 根据 $Z_3^{(i)}$ 的定义, $Z_1^{(i)}$ 和 $Z_3^{(i)}$ 没有公共分支.

Case 3. $(Z_1^{(i)})^2 = -3$.

在这种情形, 我们有 $Z_2^{(i)} = Z_3^{(i)} = 0$. 这样我们可以断言 p_i 必定是完全分歧的. 事实上 $Z_3^{(i)} \neq 0$ 对任何一般分歧的分歧轨迹奇点都成立.

这样我们给出了三次覆盖分歧轨迹奇点的一种数值分类方法. 在 § 5.1 中, 我们还将进一步分析各种类型的奇点.

回顾 § 2.3 定义的局部不变量 $w_i = m_i + n_i$. 下面的结论表明覆盖奇点的不变量 $p_a(Z_1^{(i)})$ 实际上被分歧轨迹奇点的重数所控制.

设 $Z_j^{(i)}$ 同上. 那么

$$w_i = p_a(Z_1^{(i)}) + p_a(Z_2^{(i)}) + p_a(Z_3^{(i)}). \tag{3-3}$$

因此 $w_i \geq 0$. 进一步, $w_i = 0$ 当且仅当 $\pi_i^{-1}(p_i)$ 中的点都是覆盖的光滑点.

事实上, 不妨只考虑 $i = 0$ 的情形. 由引理 3.1 , 利用 Hurwitz 公式, 我们有 $p_a(Z_1^{(0)}) + p_a(Z_2^{(0)}) + p_a(Z_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(\tilde{D}_1 + 2\tilde{D}_2)\mathcal{E}_1$. 利用公式 (2-4) 立得式(3-3). 结论的后半部分结论是显然的.

如果分歧轨迹奇点 p_i 的拉回只有有理奇点, 那么显然这时 $p_a(Z_j^{(i)}) = 0$, 只要 $Z_j^{(i)} \neq 0$ 的话 (见 [4]). 因此这时总有 $w_i \leq 2$.

在典范解消意义下, 所有的三次覆盖奇点可以被替换为以下九类奇点. 这种替换不会影响奇点对不变量的贡献值. 在二次覆盖情形, 肖刚 [61] 将奇点分为两类.

Type $0-1$ **:** p_i 是全分歧的 good cusp, 其中一般分歧轨迹 D_1 的局部方程可写为

$x^2+y^3=0$.

Type $0-2$ **：** p_i 是全分歧的 good cusp, 其中一般分歧轨迹 D_1 的局部方程可写为 $x^2+y^{3n}=0$, $n\geq 2$.

Type $1-1$**:** p_i 全分歧并且 $(Z_1^{(i)})^2=-1$, 满足 $(Z_j^{(i)})^2=-1$ 以及 $p_a(Z_j^{(i)})=0$ $(j=2,3)$. 此外, $p_a(Z_1^{(i)})\neq 0$.

Type $1-2$**:** p_i 全分歧并且 $(Z_1^{(i)})^2=-1$, 满足 $(Z_j^{(i)})^2=-1$ 以及 $p_a(Z_3^{(i)})=0$. 此外, $p_a(Z_1^{(i)})\neq 0$, 且 $p_a(Z_2^{(i)})\neq 0$.

Type 2: p_i 全分歧并且 $(Z_1^{(i)})^2=-2$, 满足 $(Z_2^{(i)})^2=-1$ 以及 $p_a(Z_2^{(i)})=0$. 此外, 由 p_i 爆发的例外曲线 E_{i+1} 落在全分歧轨迹里.

Type 3: p_i 全分歧并且 $(Z_1^{(i)})^2=-2$, 满足 $(Z_2^{(i)})^2=-1$, 且 $p_a(Z_2^{(i)})=0$. 此外, E_{i+1} 落在一般分歧轨迹里.

Type 4: p 是全分歧的, 并且 $(Z_1^{(i)})^2=-3$. 此时由 p_i 爆发的例外曲线 E_{i+1} 不落在分歧轨迹里.

Type 5: p 是一般分歧的, 并且 $(Z_1^{(i)})^2=-1$, 满足 $(Z_j^{(i)})^2=-1$ 以及 $p_a(Z_j^{(i)})=0$ $(j=2,3)$. 但是 $p_a(Z_1^{(i)})\neq 0$. 此外, $Z_1^{(i)}$ 和 $Z_3^{(i)}$ 没有公共分支.

Type 6: p 是一般分歧的, 并且 $(Z_1^{(i)})^2=-2$, 满足 $Z_2^{(i)}=0$, 以及 $(Z_3^{(i)})^2=-1$, $p_a(Z_3^{(i)})=0$. 此外, $Z_1^{(i)}$ 和 $Z_3^{(i)}$ 没有公共分支.

我们举一例说明一个三次覆盖分歧轨迹的奇点是如何替换成上述类型的奇点. 其余情形可类似地讨论 (见 [36]). 比如 p_i 是全分歧的, 且 $(Z_j^{(i)})^2=-1$以及 $p_a(Z_j^{(i)})\neq 0$ $(j=1,2,3)$. 设 p_i 的局部解消数据是 (m_i,n_i) (见 § 2.3). 于是我们在解消意义下可把这个奇点替换为 Type 4 奇点加上由 p_i 爆发的例外曲线上的无穷接近奇点, 而且要求这个 Type 4 奇点的解消数据也等于 (m_i,n_i). 由三次覆盖的不变量计算公式可知, 这样的替换没有改变奇点对不变量的影响值.

在 § 5.1 中, 我们将讨论直纹面上的三次覆盖, 它诱导出半稳定的三点式纤维化. 此时三次覆盖的分歧轨迹的奇点可以简化为六种类型. 我们可以更加精确地描述它们, 并且可以对每一类奇点计算它们提供的 (-1)-曲线条数.

3.2 奇点解消产生的 (-1)-曲线的数值分析

首先我们证明一个很有用的引理.

引理 3.2 设 C 是负定曲线, D 和 D' 是支集落在 C 中的两个闭链, 满足 $D^2 = D'^2 = -1$. 如果 $\mathrm{supp}(D) \cap \mathrm{supp}(D') \neq \emptyset$, 那么 $D \leq D'$ 或者 $D \geq D'$. 进一步, 如果 $D \neq D$, 那么 $DD' = 0$.

证明 反证法. 假设结论不成立, 我们来导出矛盾! 我们用 $D \wedge D'$ 表示不超过 D 和 D' 的最大公共闭链, 亦即 $D - D \wedge D' \geq 0$ 和 $D' - D \wedge D' \geq 0$ 没有公共分支.

设 $A = D - D \wedge D'$ 以及 $B = D' - D \wedge D'$. 由假设, 我们有 $A \neq D', 0$. 因为 $(D + D')^2 \leq -1$ 以及 $(D - D')^2 \leq -1$, 所以 $DD' = 0$. 又因为 $\mathrm{supp}(D) \cap \mathrm{supp}(D') \neq \emptyset$, 所以 $D \wedge D' \neq 0$, 亦即 $A \neq D$. 同理可证 $B \neq D, D', 0$.

因为

$$-2 = (D - D')^2 = (A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB \leq A^2 + B^2 \leq -2,$$

所以 $A^2 = B^2 = -1$ 且 $AB = 0$.

再次利用上面的讨论,我们有 $AD = AD' = BD = BD' = 0$.

于是 $(D \wedge D')D = (D' - B)D = 0$.

另一方面, $(D \wedge D')D = (D - A)D = D^2 - AD = -1$, 矛盾! ■

假设 $\pi : S_0 \to P_0$ 是一个三次覆盖, $\tilde{\pi} : \tilde{S} \to \tilde{P}$ 是 π 的典范解消. 设 $\rho : \tilde{S} \to \hat{S}$ 收缩了所有由奇点引入的 (-1)-曲线, 亦即 ρ 由以下的 blowing-down 复合而成.

$$\tilde{S} \xrightarrow{\rho_1} S'_1 \xrightarrow{\rho_2} \cdots \longrightarrow S'_{r-1} \xrightarrow{\rho_r} S'_r (= \hat{S}) \tag{3-4}$$

其中ρ_i 收缩 (-1)-曲线 C_i. 我们用花体字母 $\mathcal{C}_i$ 表示 C_i 在ρ 下的完全原像. 在不致于引起混淆的情况下, 我们仍然用 C_i 表示它在 ρ 下的严格原像.

回顾引理 3.1 的分解式 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} = Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)} + Z_3^{(i)}$. 我们断言每个完全原像 $\mathcal{C}_i$ 必定是某个分解式中的项 $Z_j^{(i)}$.

事实上, 如果结论不真, 我们可以找到某个完全原像 $\mathcal{C}_k$ 使得它不是任何一个$Z_j^{(i)}$. 不失一般性, 我们不妨假设 $\mathrm{supp}(\mathcal{C}_k)$ 包含了 $\tilde{\pi}^*E_1$ 中的某条不可约分支 $\hat{E}_1$, 这里 E_1 是典范解消中第一次爆发分歧轨迹奇点得到的例外曲线. 于是 $\mathcal{C}_k\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1 < 0$. 因为 $\mathcal{C}_k^2 = -1$, 由引理 3.2, $\mathcal{C}_k Z_1^{(0)} = \mathcal{C}_k\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_1 < 0$. 但是我们知道 $Z_1^{(0)}$ 是例外集上的基本闭链, 且当 $\rho(Z_1^{(0)})$ 不是一个点时, 有 $Z_1^{(0)} = \rho^*\rho_* Z_1^{(0)}$ (见 [56]), 此时不可能有 $\mathcal{C}_k Z_1^{(0)} < 0$. 这样我们推出

$\rho(Z_1^{(0)})$ 必须是一个点, 从而 $(Z_1^{(0)})^2 = -1$. 再次利用引理 3.2, 则有 $\mathcal{C}_k = Z_1^{(0)}$, 与假设矛盾!

接下来, 我们说明诸如引理 3.1 的各类分解式中的任何两个项 $Z_j^{(i)}$ 和 $Z_k^{(l)}$ 都不可能相同.

事实上, 假设 $Z_j^{(i)} = Z_{(k)}^{(l)}$ 且 $(i,j) \neq (l,k)$. 我们将导出矛盾. 很明显 $i \neq l$. 不妨设 $i < l$. 因为 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} > \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{l+1}$ 且 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{l+1} = 0$, 所以$\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}Z_k^{(l)} = 0$, 于是 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}Z_j^{(i)} = 0$. 但是另一方面, $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1}Z_j^{(i)} = (Z_j^{(i)})^2 < 0$, 矛盾!

如果我们定义两个集合

$$\mathcal{A} = \{(i,j) \mid (Z_j^{(i)})^2 = -1, \text{且} p_a(Z_j^{(i)}) = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{C}_k \mid \ k = 1, 2, \cdots, r\}$$

那么上面的讨论就归结为以下引理.

引理 3.3 *在上述两个集合间存在一一对应, 即 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $(i,j) \to Z_j^{(i)}$ 是一个双射. 因此, 由奇点引入的 (-1)-曲线条数恰好就是集合 $\mathcal{A}$ 中的元素个数.*

利用上述结论, 我们可以计算重数较小的分歧轨迹奇点的 Horikawa 数. 令 $z_{p_i}(x) = (x - w_i)(x - p_a(Z_1^{(i)}))(x - p_a(Z_2^{(i)}))$. 设 h_i 是 $z_{p_i}(x)$ 在 $x = 0$ 处的重数. 设 p 是三次覆盖 $\pi : Y \to X$ 的分歧轨迹奇点. ε_p 是在典范解消中, 由奇点 p 引入的 (-1)-曲线条数, 亦即奇点 $\pi^{-1}(p)$ 对应的例外集中的 (-1)-曲线条数.

利用上面的结论, 我们有

$$\varepsilon_p = \sum_{i=0}^{k-1} h_i. \tag{3-5}$$

从而

$$H_p = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(2 - w_i)(w_i - 3) + \sum_{i=0}^{k-1} h_i. \tag{3-6}$$

这里 i 跑遍所有 p 的无穷接近分歧轨迹奇点的下标.

如果 $w_i \leq 3, \forall i$ 成立. 那么此时我们有

$$H_p = \sum_{w_i \leq 2} p_a(Z_1^{(i)}) + \sum_{w_i=3} (p_a(Z_1^{(i)}) - 1) \geq 0. \tag{3-7}$$

事实上, 通过简单的计算, 当 $w_i \neq 0$ 时, 有 $h_i + p_a(Z_2^{(i)}) + p_a(Z_3^{(i)}) = 2$, 这样就直接得到上式. 注意到 $w_i = 3$ 时, 分歧轨迹奇点的拉回必定包含非有理的奇点, 从而上式中的最后一项非负. 这就证明了 $H_p \geq 0$.

利用上面的讨论, 我们也得到了关于有理奇点的一个有趣判则: $\pi^{-1}(p)$ 中的奇点是有理奇点当且仅当 $H_p = 0$ 且 $w_i \leq 2$, 对任何 i 成立.

对于 n 次覆盖的分歧轨迹的奇点, 我们也有类似的数值分类 (见 [36]). 按照这种分类, 我们也可以分析由覆盖曲面的奇点解消所产生的 (-1)-曲线, 并且得到类似引理 3.3 的结论. 我们将在第九章中简单介绍这些内容.

第四章　三点式纤维化的预备知识

4.1　稳定约化的数值不变量

任何纤维化都可以稳定约化(见 [5], [15]). 设 $f : S \to C$ 是亏格 g 纤维化, $\tilde{f}$ 是 f 的稳定约化, $\phi : \tilde{C} \to C$, $d = \deg \phi$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{S} & \xleftarrow{\tilde{\rho}} & S_2 & \xrightarrow{\rho_2} & S_1 & \xrightarrow{\rho_1} & S \times_C \tilde{C} & \xrightarrow{\Phi} & S \\
\downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
\tilde{C} & = & \tilde{C} & = & \tilde{C} & = & \tilde{C} & \xrightarrow[\phi]{} & C
\end{array}$$

这里 ρ_1 是 $S \times_C \tilde{C}$ 的正规化, ρ_2 是 S_1 的奇点的极小解消, $\tilde{\rho}$ 收缩 $f_2 : S_2 \to C$ 的纤维中的 (-1)-曲线.

基变换 ϕ 有下面的数值不变量:

$$\begin{aligned}
K_\phi^2 &= K_f^2 - \frac{1}{d} K_{\tilde{f}}^2, \\
e_\phi &= e_f - \frac{1}{d} \mathrm{e}_{\tilde{f}}, \\
\chi_\phi &= \chi_f - \frac{1}{d} \chi_{\tilde{f}}.
\end{aligned}$$

设 $F_1, \cdots, F_s$ 是 f 的奇异纤维. 谈胜利 [51] 给出了稳定约化的数值不变量的计算公式.

$$\begin{aligned}
K_\phi^2 &= \sum_{i=1}^{s} c_1^2(F_i), \\
e_\phi &= \sum_{i=1}^{s} c_2(F_i), \\
\chi_\phi &= \sum_{i=1}^{s} \chi_{F_i},
\end{aligned}$$

此处的 $c_1^2(F)$, $c_2(F)$, χ_F 是奇异纤维的非负不变量. 它们满足 Noether 公式 $c_1^2(F) + c_2(F) = 12\chi_F$.

谈胜利 [51] 也给出了这些不变量的计算公式:

$$c_1^2(F) = 4N_F + F_{red}^2 + \sum_{p\in F} \alpha_p - c_{-1}(F),$$
$$c_2(F) = 2N_F + \mu_F - \sum_{p\in F} \beta_p + c_{-1}(F).$$

其中 F_{red} 是纤维 F 的既约部分, $N_F = g - p_a(F_{\text{red}})$, $\mu_F = \sum\limits_{p\in F} \mu_p(F_{\text{red}})$ 是纤维上所有奇点的 Milnor 数. $c_{-1}(F)$ 定义为

$$c_{-1}(F) = \frac{1}{d}\#\{(-1)\text{-curves over } F' \text{ contracted by } \tilde{\rho}\}$$

为了解释 α_p 和 β_p, 我们先回顾一下曲线奇点的嵌入解消. 设 $(B, p) \subseteq \mathbb{C}^2$ 是在 $p = (0, 0)$ 的邻域 U_0 内的局部曲线. (B_{red}, p) 是奇点. $(B, p) = (B_0, p_0)$ 的嵌入解消是以下的序列

$$(U_0, B_0) \xleftarrow{\sigma_1} (U_1, B_1) \longleftarrow \cdots\cdots \xleftarrow{\sigma_r} (U_r, B_r)$$

满足以下条件:

(1) σ_i 是关于奇点 (B_{i-1}, p_{i-1}) 的解消, 要求 $\mu_{p_{i-1}} > 1$.

(2) $B_{r,\text{red}}$ 上的奇点都是通常二重点.

(3) B_i 是 B_{i-1} 的完全原像.

设 m_i 是 $(B_{i,\text{red}}, p_i)$ 的重数, 定义 $\alpha_p = \sum\limits_{i=0}^{r-1}(m_i - 2)^2$.

设 $q \in B_r$ 是二重点, a_q 和 b_q 分别是过 (B_r, q) 的两条分支的重数, 定义 $\beta_p := \sum\limits_{q\in B_r} [a_q, b_q]$, 其中 $[a, b] := \frac{(a,b)^2}{ab}$.

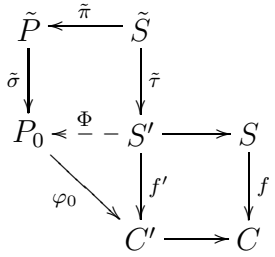
$c_1^2(F)$ 和 $c_2(F)$ 中的任何一个为零当且仅当 F 是半稳定的. 因此一个半稳定纤维化在任何基变换下, 它的相对不变量都成比例地增长, 所以斜率不会发生变化.

现在我们假设 $f : S \to C$ 是亏格 g 的相对极小三点式纤维化.

我们已知如下事实 (见 [13], [47]).

引理 4.1 如果 $f : S \to C$ 是三点式纤维化, 那么在若干次基变换后, 我们有下面

的交换图:



(4-1)

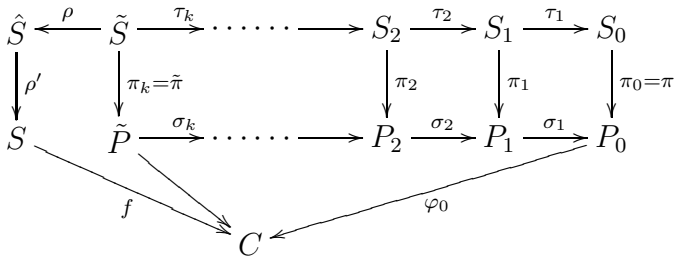
此处 $f' : S' \to C'$ 是 f 的基变换, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}$ 都是双有理态射, $\varphi_0 : P_0 \to C'$ 是极小直纹面, $\tilde{\pi} : \tilde{S} \to \tilde{P}$ 是光滑三次覆盖.

引理 4.2 ([51], **推论** 4.3 **和推论** 4.4) 设 $\tilde{f}$ 是 f 的稳定约化, 且斜率 $\lambda_f > 8$.

(1) 如果 f 不是半稳定, 那么 $\lambda_{\tilde{f}} > \lambda_f$.

(2) 如果 f 的斜率极大, 那么 f 是半稳定的.

由上面的讨论, 我们总是可以假定 f 是半稳定的. 由引理 4.1, 还可以进一步假设下面的交换图成立.



(4-2)

此处 $\pi : S_0 \to P_0$ 是三次覆盖, 且 $\varphi_0 : P_0 \to C$ 是相对极小直纹面. $\tilde{\pi} = \pi_k : \tilde{S} \to \tilde{P}$ 是 π 的典范解消. $\rho : \tilde{S} \to \hat{S}$ 收缩 π 的奇点在典范解消中引入的 (-1)-曲线. ρ' 收缩$f\rho' : \hat{S} \to C$的纤维中所有的 (-1)-曲线 (称为额外收缩). 这样我们得到亏格 g 的相对极小纤维化 $f : S \to C$.

设 F_0 是 $\varphi_0 : P_0 \to C$ 的纤维, 设 C_0 是截面, 使得自交数 $C_0^2 = -e$ 极小.

回顾三次覆盖 π 的分歧轨迹 $R = D_1 + 2D_2$. 因为 f 的一般纤维的亏格是 g, 由 Hurwitz 公式, 我们有 $RF = D_1F + 2D_2F = 2g + 4$. 设 $D_2 \sim \alpha C_0 + \beta F$, $D_1 \sim (2g + 4 - 2\alpha)C_0 + 2\gamma F$ (因为 D_1 是偶除子).

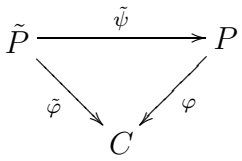
进一步, 我们还可以通过基变换使得上述的三次覆盖的分歧轨迹有很好的性质.

引理 4.3 ([12], **引理** 5.6) 在若干次基变换后, 我们总可以假设 R 没有竖直纤维, 并且 D_1 和 D_2 的任何不可约分支都是 $\varphi_0 : P_0 \to C$ 的截面.

4.2 三次覆盖的规范模型

仍然沿用上一节的记号和概念.

引理 4.4 $\tilde{P}$ 能够被收缩成相对极小模型 P, 此处 $\varphi : P \to C$ 是满足以下性质的直纹面.



(1) 设 $\tilde{R} = \tilde{D}_1 + 2\tilde{D}_2$ 是 $\tilde{\pi}$ 的分歧轨迹, 此处 $\tilde{D}_1$ (相应的, $\tilde{D}_2$) 是一般分歧(相应的, 全分歧) 轨迹. 设 $R = D_1 + 2D_2$ 是 $\tilde{R}$ 在 P 中的像. 那么 $\tilde{\psi} : \tilde{P} \to P$ 是 R 的典范解消.

(2) 设 R_h (相应的, $D_{1,h}$, $D_{2,h}$) 是 R (相应的, D_1, D_2) 的水平部分. 设 $\alpha = D_2F_0$.

如果 $\alpha \geq 2$, 那么 $D_{2,h}$ 的奇点阶数不超过 $\alpha/2$.

如果 $\alpha \leq 1$, 那么 R_h 的奇点阶数不超过 $g + 2$.

(3) 设 p 是 D_2 和纤维 F_0 的交点. 如果 $\alpha = 2$ 并且 R_h 的每个不可约分支都是截面, 那么 $D_{1,h}$ 在 p 处的重数不超过 g.

这样一个几何直纹面 $\varphi : P \to C$ 连同分歧轨迹 R 被称为规范模型.

证明 关于 (1) 和 (2) 的类似证明可以参看 [12] 中引理 5.2. 我们只证明 (3). 此时, $\alpha = 2$ 且 $D_{1,h}F_0 = 2g$.

设 R 满足 (1) 和 (2). 由假设, D_2 由两个互不相交的截面组成, 记为 $\Gamma_1 + \Gamma_2$. 设 p_i 是 Γ_i 和 F_0 的交点. 由 (2) 可推出 $p_1 \neq p_2$.

如果 $D_{1,h}$ 在 p_1 处的重数大于 g, 那么 $D_{1,h}$在 p_2 处的重数小于 g. 我们爆发 p_1, 于是 F_0 的严格原像是一条 (-1)-曲线. 当我们收缩掉这条 (-1)-曲线后,得到一条新的相对极小纤维, 记作 F_1. 类似地, 我们重复这一过程直到 R_h的奇点满足条件 (3) 为止. 这个操作过程不可能一直持续下去, 因为每次爆发都会使奇点的几何亏格严格减小. ■

4.3 相对分歧指数

设 D 是直纹面 $\varphi_0 : P_0 \to C$ 上的任一有效除子. 那么 D 的相对分歧指数定义为

$$r_D = D(D + K_{P_0/C}).$$

假设 D 是水平既约有效除子(亦即, D 不含 φ_0 的任何纤维). 如果在 k 次爆发后, D 的严格原像 $\tilde{D}$ 变为光滑曲线 (可能由有限条不相交的光滑曲线组成), 那么

$$r_D = 2\sum_{p\in D}\delta_p(D) + \{\text{ramification index of this finite morphism } \tilde{D} \to C\}, \tag{4-3}$$

此处 $\sum_{p\in D}$ 跑遍 D 上所有奇点, 并且 $\delta_p(D)$ 是 $p \in D$ 的几何亏格 (见 [61]).

设 D 和 D' 是直纹面 $\varphi_0 : P_0 \to C$ 上的有效除子, F_0 是一条纤维. 设 $D \sim aC_0 + bF_0$, $D' \sim a'C_0 + b'F_0$. 下面的恒等式可以通过直接的相交数计算得到.

$$(K_{P_0/C}D)(F_0D') + (K_{P_0/C}D')(F_0D) + 2DD' = 0. \tag{4-4}$$

特别地, 如果 $D = D'$, 则有

$$(F_0D)r_D - D^2(F_0D - 1) = 0, \tag{4-5}$$

$$r_D + (K_{P_0/C}D)(F_0D - 1) = 0. \tag{4-6}$$

取 $D = D_1$, $D' = D_2$, 我们有

$$D_1D_2 = \frac{\alpha}{4g + 6 - 4\alpha}r_{D_1} + \frac{g + 2 - \alpha}{\alpha - 1}r_{D_2}, \qquad (\text{if } \alpha \neq 1). \tag{4-7}$$

设 $\tilde{\pi} : \tilde{S} \to \tilde{P}$ 是 π 的典范解消 (见 § 2.1). 设 $\tilde{R} = \tilde{D}_1 + 2\tilde{D}_2$ 是 $\tilde{\pi}$ 的分歧轨迹. 由等式 (2-4), 我们有

$$r_{D_1} = \sum_{i=0}^{k-1} 2m_i(2m_i - 1) + r_{\tilde{D}_1}, \tag{4-8}$$

$$r_{D_2} = \sum_{i=0}^{k-1}(n_i - 1)n_i + r_{\tilde{D}_2}, \tag{4-9}$$

此处 m_i, n_i 是 § 2.3 定义的局部不变量.

特别地, 如果 $\tilde{R} = \tilde{D}_1 + 2\tilde{D}_2$ 的每个不可约分支都是直纹面 $\tilde{P} \to C$ 的截面, 那么 $r_{\tilde{D}_i} = -2t_i$, 此处 t_i 是爆发 $\sigma : \tilde{P} \to P_0$ 中那些落在分歧轨迹 $\tilde{D}_i$里的不可约例外曲线的条数.

推论 4.1　设 ε 是 $\tilde{S} \to C$ 的所有纤维中可以被收缩掉的 (-1)-曲线条数, 即 $\varepsilon = \chi_{\mathrm{top}}(\tilde{S}) - \chi_{\mathrm{top}}(S)$. 于是我们有

$$\begin{aligned} 3(g+1)K_f^2 = &\left(\frac{3g-1}{2} - \frac{g-3}{4g+6-4\alpha}\right) r_{D_1} + 4(g-1)r_{D_2} - 16\sum_{i=0}^{k-1} m_i n_i \\ &- (g+1)\sum_{i=0}^{k}(6(m_i-1)^2 + 4n_i(n_i-3) + 3) + 3(g+1)\varepsilon, \end{aligned} \tag{4-10}$$

$$\begin{aligned} 36(g+1)\chi_f = &\left(\frac{9g+5}{2} - \frac{g-3}{4g+6-4\alpha}\right) r_{D_1} + 2(5g+1)r_{D_2} - 16\sum_{i=0}^{k-1} m_i n_i \\ &- 2(g+1)\sum_{i=0}^{k}(9m_i(m_i-1) + n_i(5n_i-9)), \end{aligned} \tag{4-11}$$

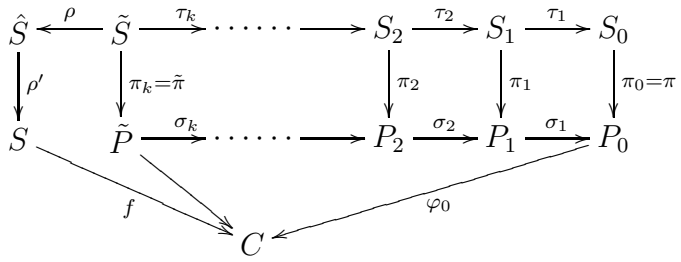
$$e_f = r_{D_1} + 2r_{D_2} - \sum_{i=0}^{k}(2m_i(2m_i-1) + 2n_i(n_i-1) - 3) - \varepsilon. \tag{4-12}$$

证明　由等式 (2-6), (2-7), (4-5), (4-6) 以及 (4-7) 立得. ■

第五章　奇异性指数

5.1　奇异性指数

以下我们总假设 $f : S \to C$ 是亏格 g 的半稳定相对极小三点式纤维化; 它是由极小直纹面上的规范三次覆盖 $\pi : S_0 \to P_0$ 诱导出来的; 分岐轨迹的不可约分支都是直纹面 $\varphi_0 : P_0 \to C$ 的截面. 在 § 3.1 节里, 我们给出了关于三次覆盖分歧轨迹奇点的简单数值分类. 这个分类是依据 $(Z_1^{(i)})^2$ 的值来逐一讨论的. 先让我们简单回顾这些内容.



此处 $\tilde{\pi}$ 是 π 的典范解消. 设 E_i 是 σ_i 对应的例外曲线, 并且 $\mathcal{E}_{i+1}$ 是 E_i 在 $\tilde{P}$ 中的完全原像. 设 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k : \tilde{P} \to P_0$.

$\rho : \tilde{S} \to \hat{S}$ 收缩 π 的典范解消中由奇点引入的 (-1)-曲线. ρ' 收缩 $f\rho' : \hat{S} \to C$ 的纤维中剩余的 (-1)-曲线 (称为额外收缩). $\tilde{F}$ 表示 $S \tilde{\to} C$ 中的纤维, F 是 $P_0 \to C$ 中相应的像纤维.

我们需要下面的引理. 它的证明放在 § 6.2.

引理 5.1　*假设 $\alpha = D_2F_0 \geq 2$. E_i 是 σ_i 对应的例外曲线.*

(1) *如果 E_i 落在全分歧轨迹里, 即 $\tilde{\pi}^*(E_i) = 3\Gamma$, 则 Γ 是 (-1)-曲线.*

(2) *如果 E_i 落在一般分歧轨迹里, 即 $\tilde{\pi}^*(E_i) = 2\Gamma + \Gamma'$, 则 Γ 是 (-1)-曲线.*

任何分歧轨迹奇点 p_i 对应的例外集都有以下的分解: $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} = Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)} + Z_3^{(i)}$.

Case 1. $(Z_1^{(i)})^2 = (Z_2^{(i)})^2 = (Z_3^{(i)})^2 = -1$.

因为 $2Z_2^{(i)} \leq \tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} \leq \tilde{F}$, 注意到最终的纤维是半稳定的, 所以 ρ 收缩了$\mathrm{supp}(Z_2^{(i)})$中所有的曲线分支. 因此 $p_a(Z_2^{(i)}) = p_a(Z_3^{(i)}) = 0$.

(1.1) p_i 是全分歧的, 并且 $\tilde{\pi}^*E_{i+1} = 3C_1$.

此时, $Z_1^{(i)} \geq Z_2^{(i)} \geq Z_3^{(i)}$ 且 $Z_3^{(i)}C_1 = -1$. 特别地, 如果 $p_a(Z_1^{(i)}) = 0$, 那么 p_i 就是 good cusp 点.

根据引理 5.1 可知, $Z_3^{(i)} = C_1$. 首先我们断言 $Z_1^{(i)} - C_1$ 是连通除子. 假设 $Z_1^{(i)} - C_1$ 不连通, 则可设 $Z_1^{(i)} - C_1 = A + B$, 此处 $A, B \geq 0$ 且 A, B无公共分支. 由于 $(Z_1^{(i)} - C_1)^2 = -2$, 因此 $A^2 = B^2 = -1$. 利用引理3.2, $C_1A = Z_1^{(i)}A = 0$. 于是$A^2 = Z_1^{(i)}A - C_1A = 0$, 矛盾. 因此 $Z_1^{(i)} - C_1$ 是连通的.

设 p_{i+1} 是例外曲线 E_{i+1} 上的一个分歧轨迹奇点. 由于 $Z_1^{(i)} - C_1$ 连通, 并且不含 C_1, 因此 $\mathrm{supp}(Z_1^{(i)} - C_1) = \mathrm{supp}(Z_1^{(i+1)})$, 也就是说, p_{i+1} 是 E_{i+1}上唯一的一个分歧轨迹奇点. 爆发 p_{i+1} 后, 我们得到例外曲线 E_{i+2}. 根据 § 3 的讨论, E_{i+2} 落在完全分歧轨迹里. 进一步, 通过解消容易看到, 在 E_{i+1} 上有两个奇点, 其中一个奇点是 $p_{i+2} = E_{i+1} \cap E_{i+2}$. 爆发掉这两个奇点, 那么 E_{i+1} 和 E_{i+2} 就变成孤立 (-3)-曲线.

(1.2) p_i 是一般分歧的, 且 $\tilde{\pi}^*E_{i+1} = 2C_1 + C_2$.

在这种情形, $Z_1^{(i)} \geq Z_2^{(i)}$. $Z_2^{(i)}C_1 = -1$ 且 $Z_3^{(i)}C_2 = -1$. 类似可证, 在 E_{i+1} 上有唯一的分歧轨迹奇点 p_{i+1}. 在爆发 p_{i+1} 之后, E_{i+1} 变成孤立的 (-2)-曲线.

Case 2. $(Z_1^{(i)})^2 = -2$.

(2.1) p_i 是全分歧的, 并且 E_{i+1} 落在一般分歧轨迹里.

此时, $(Z_2^{(i)})^2 = -1$ 并且 $Z_3^{(i)} = 0$. 设 $\tilde{\pi}^*E_{i+1} = 2C_1 + C_2$. 根据引理 5.1, 我们有 $Z_2^{(i)} = C_1$, 并且在 E_{i+1} 上有唯一的分歧轨迹奇点 p_{i+1}. 在爆发 p_{i+1} 之后, E_{i+1} 变成孤立的 (-2)-曲线.

(2.2) p_i 是全分歧的, 并且 E_{i+1} 落在全分歧轨迹里.

我们断言, 在本节的假设条件下, 这种奇点不可能出现. 假设存在此类奇点, 我们来导出矛盾.

首先我们断言在 E_{i+1} 上有且仅有两个分歧轨迹奇点 p_{i+1} 和 p_{i+2}. 因此在爆发这两个奇点后, E_{i+1} 变成孤立的 (-3)-曲线.

假设结论不成立. 那么 E_{i+1} 上有唯一的分歧轨迹奇点 p_{i+1}. 在爆发 p_{i+1} 后, 我们得到相应的例外曲线 E_{i+2}. 根据引理 5.1, E_{i+2} 落在全分歧轨迹里. 进一步, 我们知道

E_{i+1} 上有两个奇点, 其中一个是 $p_{i+2} = E_{i+1} \cap E_{i+2}$. 在爆发这两个奇点之后, E_{i+1} 和 E_{i+2} 变成孤立的 (-3)-曲线. 设 E_{i+3} 是σ_{i+3} 在 p_{i+2} 爆发所得的例外分支. 于是, E_{i+3} 不落在分歧轨迹里. 特别地, $C_3 = \tilde{\pi}^* E_{i+3}$ 是 (-3)-曲线, 并且它在收缩掉 $\tilde{\pi}^* E_{i+1}$ 和 $\tilde{\pi}^* E_{i+2}$ 之后也变成 (-1)-曲线. 于是 $Z_1^{(i)} C_3 = \rho^* \rho_* Z_1^{(i)} C_3 = 0$. 由于 $C_3 Z_2^{(i)} = C_3 C_1 > 0$, 所以 $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} C_3 = Z_2^{(i)} C_3 > 0$, 矛盾!

这样我们就证明 E_{i+1} 上有且仅有两个分歧轨迹奇点.

注意 p_i 爆发之前总有一条纤维中的不可约分支经过它. 易知这条分支不落在分歧轨迹里. 爆发 p_i 后, 它和例外曲线上其他两个无限接近点完全分开. 收缩掉 E_{i+1} 在 $\tilde{S}$ 中的原像 (一条 (-1)-曲线) 后, p_i 的完全原像含有一个二重点, 而那条不可约分支的原像恰恰也通过这个点. 这样, 相应的原像纤维含有一个三重点. 这就与半稳定假设矛盾. 因此这种类型的奇点不会出现.

(2.3) p_i 是一般分歧的.

在这种情形, $(Z_3^{(i)})^2 = -1$ 且 $Z_2^{(i)} = 0$. 此外 $Z_1^{(i)}$ 和 $Z_3^{(i)}$ 没有公共分支. 我们假断言 E_{i+1} 不可能落在分歧轨迹里. 事实上, 假如 E_{i+1} 落在分歧轨迹里, 那么 E_{i+1} 是简单分歧的, 并且 $\tilde{\pi}^* E_{i+1} = 2C_1 + C_2$. 根据 § 6.2 的讨论, C_1 是 (-1)-曲线. 如果 $Z_1^{(i)} C_1 < 0$, 那么 $(Z_1^{(i)} - C_1) C_k \leq 0$，对 $Z_1^{(i)}$ 中任何不可约分支 C_k成立. 由基本闭链的定义, 我们有 $Z_1^{(i)} - C_1 \geq Z_1^{(i)}$, 矛盾! 因此 $Z_1^{(i)} C_1 = 0$. 这样 $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} C_1 = Z_1^{(i)} C_1 = 0$. 但是, $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} C_1 = \mathcal{E}_{i+1} \tilde{\pi}_* C_1 = -1$, 矛盾!

因此, E_{i+1} 不落在分歧轨迹里.

Case 3. $(Z_1^{(i)})^2 = -3$.

此时, 我们有 $Z_2^{(i)} = Z_3^{(i)} = 0$, 并且 p_i 必定是全分歧的.

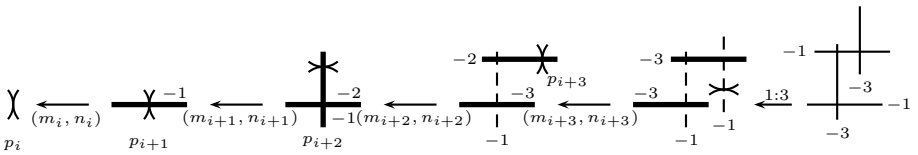
类似于 (2.3) 的讨论, 我们可以证明 E_{i+1} 不落在分歧轨迹里.

综上所述, 我们可以将奇点分成下面的六类.

为了明确奇点的典范解消过程, 解消图中的粗线用来表示三次覆盖全分歧轨迹 D_2 中的不可约分支. 图中的细线用来表示三次覆盖一般分歧轨迹 D_1 中的不可约分支, 而虚线用来表示不落在分歧轨迹里的那些例外分支. 曲线的自交数被标在该曲线的边上. 在箭头下方的二元数组 $\underset{(m_i,n_i)}{\longleftarrow}$ 表示解消中所爆发的奇点 p_i 的局部不变量 m_i, n_i. 此外, $\overset{1:3}{\longleftarrow}$ 表示三次覆盖的拉回.

按照 § 3.1 的分类结果, 在本节开头的假设条件下, 每个分歧轨迹奇点 p_i (包括在典范解消中出现的那些无穷接近奇点) 只能是以下类型之一:

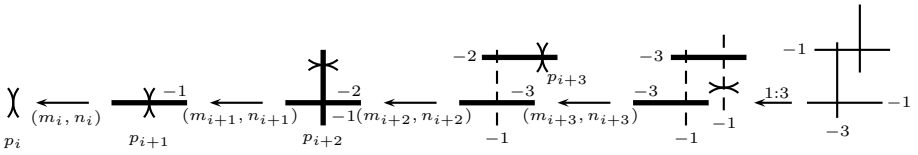
Type 0 : p_i 是good cusp, 亦即, $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} = Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)} + Z_3^{(i)}$, $(Z_j^{(i)})^2 = -1$ 且 $p_a(Z_j^{(i)}) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$. 此外p_i 是全分歧的.



此处 $m_i = m_{i+1} = m_{i+3} = n_{i+3} = 1$, $n_i = -1$, $n_{i+1} = m_{i+2} = 0$, $n_{i+2} = 2$.

以下各节中, 我们总是把 p_i 连同它的那些无穷接近奇点 p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3} 放在一起视为一个奇点, 我们仍然用 p_i 表示这个奇点.于是 p_i 贡献了 4 条由奇点引入的 (-1)-曲线.

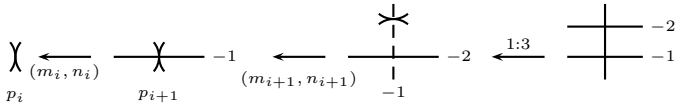
Type 1 (m, n)**:** p_i 全分歧并且 $(Z_1^{(i)})^2 = -1$, 满足 $(Z_j^{(i)})^2 = -1$ 以及 $p_a(Z_j^{(i)}) = 0$ $(j = 2, 3)$. 无论如何, $p_a(Z_1^{(i)}) \neq 0$.



此处 $m_i = m_{i+1} = m_{i+3} = m$, $m_{i+2} = 0$; $n_i = n$, $n_{i+1} = n + 1$, $n_{i+2} = 2$ 且 $n_{i+3} = n + 2$.

我们总是把 p_i 连同它的那些无穷接近奇点 p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3} 放在一起视为一个奇点, 我们仍然用 p_i 表示这个奇点. 于是 p_i 贡献了 3 条由奇点引入的 (-1)-曲线.

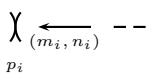
Type 3 (m, n)**:** p_i 全分歧并且 $(Z_1^{(i)})^2 = -2$, 满足 $(Z_2^{(i)})^2 = -1$, 且 $p_a(Z_2^{(i)}) = 0$. 此外, E_{i+1} 落在一般分歧轨迹里.



此处 $m_i = m$, $m_{i+1} = m + 1$; $n_i = n_{i+1} = n$.

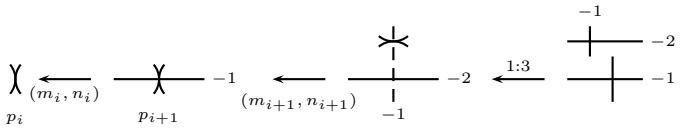
我们总是把 p_i 连同它的无穷接近奇点 p_{i+1} 放在一起视为一个奇点, 我们仍然用 p_i 表示这个奇点. 于是 p_i 只贡献了 1 条由奇点引入的 (-1)-曲线.

Type 4 (m, n)**:** p 是全分歧的, 并且 $(Z_1^{(i)})^2 = -3$.



此处 $m_i = m$, $n_i = n$. p_i 不提供任何由奇点引入的 (-1)-曲线.

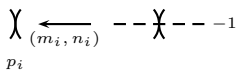
Type 5 $(m, 0)$**:** p 是一般分歧的, 并且 $(Z_1^{(i)})^2 = -1$, 满足 $(Z_j^{(i)})^2 = -1$ 以及 $p_a(Z_j^{(i)}) = 0$ $(j = 2, 3)$. 但是 $p_a(Z_1^{(i)}) \neq 0$. 此外, $Z_1^{(i)}$ 和 $Z_3^{(i)}$ 没有公共分支.



此处 $m_i = m$, $m_{i+1} = m+1$; $n_i = n_{i+1} = 0$. .

我们总是把 p_i 连同它的无穷接近奇点p_{i+1} 放在一起视为一个奇点, 我们仍然用 p_i. 于是 p_i 贡献了 3 条由奇点引入的 (-1)-曲线.

Type 6 $(m,0)$**:** p 是一般分歧的, 并且 $(Z_1^{(i)})^2 = -2$, 满足 $Z_2^{(i)} = 0$, 以及 $(Z_3^{(i)})^2 = -1$, $p_a(Z_3^{(i)}) = 0$. 此外, $Z_1^{(i)}$ 和 $Z_3^{(i)}$ 没有公共分支.



此处 $m_i = m$, $n_i = 0$. p_i 只贡献了 1 条由奇点引入的 (-1)-曲线.

在二次覆盖情形, Type 5 $(m,0)$ 奇点恰恰对应 $(2m+1 \to 2m+1)$ 奇点; Type 6 $(m,0)$ 对应 $2m$ 阶奇点. 具体细节可以参考 [61].

出现在典范解消中的 Type k (m,n) 奇点的个数可以记为 $s_k(m,n)$. s_0 则表示good cusps 点的个数. 设 $s_k(m,n) = s'_k(m,n) + s''_k(m,n)$, 其中 $s''_k(m,n)$ 表示参与额外收缩的 Type k (m,n) 奇点的个数, 剩余奇点的个数记为 $s'_k(m,n)$.

这些 $s_k(m,n)$ 被称为奇异性指数.

5.2 计算典范解消产生的 (-1)-曲线条数

现在我们要说明在收缩掉上述奇点所提供的 (-1)-曲线之后, 例外集中不会再有其他的 (-1)-曲线. 事实上, 根据引理 3.3, 我们知道奇点引入的 (-1)-曲线在 $\tilde{S}$ 中的完全原像必定是某个 $Z_j^{(i)}$, 这里 $Z_j^{(i)}$ 是某个奇点的基本闭链分解项 (见 § 3.1). 剩下的, 我们只要说明这些 $Z_j^{(i)}$ 的个数恰好就等于上述奇点所提供的 (-1)-曲线的条数就可以了. 实际上, 我们只需考察每一类奇点 (包括它的那些无穷接近点) 提供了多少这样的 $Z_j^{(i)}$, 然后再和这个奇点提供的 (-1)-曲线条数比较一下, 看看是否一致.

举例来说, 比如 p_i 是 Type 1 奇点. 这时它还包括了无穷接近奇点 p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}. p_i 对应的基本闭链分解 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+1} = Z_1^{(i)} + Z_2^{(i)} + Z_3^{(i)}$, 其中 $Z_2^{(i)}$ 和 $Z_3^{(i)}$ 分别是某条 (-1)-曲线在 $\tilde{S}$ 中的完全原像 (见引理 3.3). 同样, p_{i+1} 对应的基本闭链分解 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+2} = Z_1^{(i+1)} + Z_2^{(i+1)}$,

其中 $(Z_2^{(i+1)})^2 = -2$, $Z_2^{(i+1)}$ 是某条 (-1)-曲线在 $\tilde{S}$ 中的完全原像. p_{i+2} 和 p_{i+3} 对应的基本闭链分解分别是 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+3} = Z_1^{(i+2)}$ 和 $\tilde{\pi}^*\mathcal{E}_{i+4} = Z_1^{(i+3)}$, 此处 $(Z_1^{(i+2)})^2 = (Z_1^{(i+3)})^2 = -3$. 它们两个不提供满足引理 3.3 条件的基本闭链分解项. 综上所述, 我们知道Type 1 奇点一共提供了三项满足引理 3.3 条件的 $Z_j^{(i)}$, 恰好 Type 1 奇点也提供了提供三条 (-1)-曲线.

回顾一下, ε_P 是由奇点引入的 (-1)-曲线条数. 根据上面的分类结果, 我们立刻就有

$$\begin{aligned}\varepsilon_P =& 4s_0 + 3\sum_{m,n} s_1(m,n) + \sum_{m,n} s_3(m,n)\\ &+ 3\sum_{m} s_5(m,0) + \sum_{m} s_6(m,0).\end{aligned}$$

为了计算额外收缩, 我们需要下面的引理. 它的证明放在 § 6.3.

引理 5.2　*如果 $\alpha = D_2F_0 \geq 2$, 那么 $\varepsilon_F = 0$, 也就是说额外收缩不出现.*

如果 $\alpha \leq 1$, 那么

$$\begin{aligned}\varepsilon_F =& \sum_{2\leq m+\alpha\leq \frac{g+1}{2}} 2s_3''(m,\alpha) + 3s_3''(1-\alpha,\alpha) + \sum_{2\leq m+\alpha\leq \frac{g+2}{2}} s_4''(m,\alpha)\\ &+ \sum_{2\leq m\leq \frac{g+2}{2}} s_6''(m,0) + 2s_6''(1,0).\end{aligned} \tag{5-1}$$

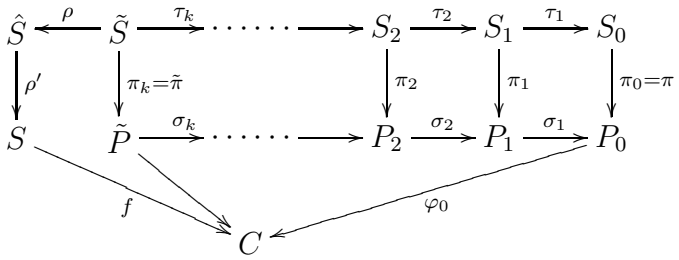
其中最末两项只在 $\alpha = 0$ 时出现.

第六章　几个引理的证明

6.1　一些记号说明

我们总假设 $f : S \to C$ 是亏格 g 的半稳定相对极小三点式纤维化; 它是由极小直纹面上具有规范模型的三次覆盖 $\pi : S_0 \to P_0$ 诱导出来;分歧轨迹的不可约分支都是直纹面 $\varphi_0 : P_0 \to C$ 的截面.

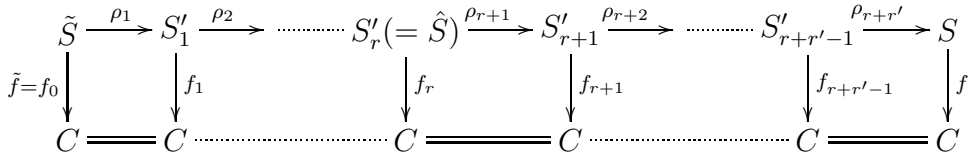
回顾三次覆盖光滑解消的交换图：



此处 $\tilde{\pi}$ 是 π 的光滑解消. σ_i 是在 p_{i-1} 处的爆发, E_i 是相应的例外曲线，$\mathcal{E}_{i+1}$ 是 E_i 在 $\tilde{P}$ 中的完全原像. 设 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k : \tilde{P} \to P_0$.

$\rho : \tilde{S} \to \hat{S}$ 收缩典范解消下奇点例外集中所有的 (-1)-曲线. ρ' 收缩 $f\rho' : \hat{S} \to C$ 的纤维中剩余的 (-1)-曲线(称为额外收缩). 这样我们得到 $f : S \to C$.

ρ 和 ρ' 都是由一些 blow-downs 复合而成, 即 $\rho = \rho_r\rho_{r-1}\cdots\rho_1$ 以及 $\rho' = \rho_{r+r'}\cdots\rho_{r+1}$.



此处 $\rho_i : S'_{i-1} \to S'_i$ 将不可约分支 Γ_i收缩为一点. 我们记 Γ_i 在 $\tilde{S}$ 中的原像为$\tilde{\Gamma}_i$. 我们记 $\varepsilon_P = r$ 以及 $\varepsilon_F = r'$.

图中的 $f_k : S'_k \to C$ 是由 f 和 ρ_i 所诱导的纤维化. 我们记 F 为 f 的一条纤维, F_k 是

F 在$S'_k \to C$ 中的原像纤维, $\tilde{F} = \rho^*\rho'^*F$ 是 $\tilde{S} \to C$ 中相应的原像纤维. 记 $F_0 = \sigma\tilde{\pi}(\tilde{F})$ 是 $\tilde{F}$ 在$\varphi_0 : P_0 \to C$中的像纤维，$\tilde{F}_0$ 则是 F_0 在 σ 下的严格原像.

因为 f 是半稳定的, 所以 S'_k 上的纤维 F_k只有通常二重点 $(k = 1, \cdots, r + r')$.

一条纤维的不可约分支 Γ 在该纤维中的重数被记为 n_Γ.

6.2 引理 5.1 的证明

这一节我们将证明引理 5.1. 所有的记号都在 § 6.1 给出.

下面的简单事实来自于 Zariski 引理 (见 [10]), 后面的讨论中常常会用到. 假设一条纤维只含有通常二重点, 且某条不可约分支 Γ 是 (-1)-曲线; 设 Γ' 是纤维中与 Γ 相交的另一条不可约分支, 则 $n_\Gamma \geq n_{\Gamma'}$.

特别地, Γ 上至多只有 n_Γ 个通常二重点作为纤维的奇点, 即 Γ 最多只和纤维中的 n_Γ 条不可约分支相交. 如果 $n_\Gamma = 1$, 那么显然 Γ 上只有一个可分离点. 这意味着 Γ 不可能落纤维中的在某个圈里面. 更一般地, 只要 Γ 在纤维中能被收缩掉, 且 $n_\Gamma = 1$, 那么它只含一个可分离点.

回顾分歧轨迹的奇点爆发的例外曲线 E_i, 为了书写方便, 在不致引起混淆的情况下, 我们仍用 E_i 表示它在 P_j 上的严格原像(见 § 6.1). n_{E_i} 仍然表示分支 E_i 在纤维 σ^*F_0 中的重数, 易知这个重数只和 E_i 有关，而与 E_i 所参与的爆发无关.

此外我们总是认为典范解消是"极小"的, 也就是说, 在整个解消过程中我们不会对分歧轨迹的光滑点做爆发.

引理 5.1 的证明: 注意 Γ 是纤维 $\tilde{F}$ 中的重分支. 因为 f 是半稳定的, 由前讨论可知, Γ 要被 ρ 收缩. 也就是说 Γ 是某个 Γ_j 的严格原像.

下面我们来证明情形 (1) 的结论; 至于 (2) 可以完全类似地证明. 假设 Γ 不是 (-1)-曲线, 我们将得到矛盾，从而完成证明. 证明过程分几步完成.

Step 1. 因为 Γ 不是 (-1)-曲线, 而 Γ 又被 ρ 收缩, 所以纤维 $\tilde{F}$ 中可以找到一条不可约分支 C_1 与 Γ 相交; 并且在 C_1 被收缩之后, Γ 才可能变为 (-1)-曲线.

我们首先断言 $n_{C_1} \geq n_\Gamma$, 这里的诸 n表示纤维 $\tilde{F}$ 中相应不可约分支的重数; 等号成立意味着 C_1 通过收缩最后变成 (-1)-曲线时, 其所在的纤维中只有唯一的一条不可约分支通过它.

事实上, 注意到 n_{C_1}, n_Γ 和收缩过程无关, 我们不妨暂时假设 C_1 已经是 (-1)-曲线. 于是利用本节开头提到的事实，立刻得到所要的结论.

$\tilde{\pi}(C_1)$ 是某条例外曲线 E_l 的严格原像. 由于 C_1 与 Γ 相交，故 E_i 与 E_l 相交. 又因为 $\tilde{\pi}$ 是分歧轨迹光滑的, 所以 E_l 必定不落在分歧轨迹里. 注意到 $\tilde{F} = (\sigma\tilde{\pi})^* F_0$, 我们很容易知道 $n_{C_1} = n_{E_l}$ 以及 $n_\Gamma = 3n_{E_i}$. 于是我们得到 $n_{E_l} \geq 3n_{E_i}$.

后面的几步中，我们就是要断言上面的不等式不可能成立. 这样就导出矛盾, 从而证明了命题.

Step 2. 为了讨论方便, 我们不妨假设 E_i 是所有使命题结论 (1) 不成立的例外曲线中具有最大下标的一个.

首先, 我们断言 $l > i$. 若不然, 由Blowing-up的简单性质可知 $n_{E_l} \leq n_{E_i}$, 这就与第一步的结论相悖.

于是我们可以找到一个无穷接近奇点 $p_i \in E_i$ (在 P_i 上看), 使得 p_i 在爆发 σ 下的完全原像中含有 E_l. 爆发一次 p_i, 设 E_{i+1} 是相应的例外曲线, $\mathcal{E}_{i+1}$ 是 E_{i+1} 的完全原像. 如果爆发 p_i 之前没有其他的例外曲线 E_k $(k < i)$经过 p_i, 那么 $n_{E_{i+1}} = n_{E_i}$; 否则 $n_{E_{i+1}} = n_{E_k} + n_{E_i} \leq 2n_{E_i}$ (因为 $n_{E_k} \leq n_{E_i}$). 这也说明 $E_{i+1} \neq E_l$, 否则就与 $n_{E_l} \geq 3n_{E_i}$ 矛盾.

下面我们断言 E_{i+1} 落在全分歧轨迹里, 而且上面只有两个分歧轨迹奇点, 在爆发它们之后, E_{i+1} 变成孤立的 (-3)-曲线.

事实上, 因为 E_l 落在 E_{i+1} 的完全原像 $\mathcal{E}_{i+1}$ 中, 并且 E_l 与 E_i 相交, 所以 $p_{i+1} = E_i \cap E_{i+1}$ (在 P_{i+1} 上看) 必定是分歧轨迹奇点. 另一方面, 请注意 π 的分歧轨迹分支都是截面, 所以在 p_{i+1} 处只有 E_i 和 E_{i+1} 经过. 这样, E_{i+1} 落在分歧轨迹里. 由于一个分歧轨迹奇点不可能仅仅由一条全分歧和一条一般分歧的轨迹正常相交得到, 所以我们立刻推出 E_{i+1} 只能落在全分歧轨迹里.

同样注意到 π 的分歧轨迹分支都是截面, 所以 E_{i+1} 上除了 p_{i+1} (在 P_{i+1} 上看) 以外应该至少还有一个奇点, 使得 π 的某些分歧轨迹分支通过它, 这一点记为 p_{i+2}. 由于一开始我们假设 E_i 是所有使得命题结论 (1) 不成立的例外曲线中具有最大下标的一个, 所以 E_{i+1} 最终须变成孤立的 (-3)-曲线. 但是当我们爆发 p_{i+1}, p_{i+2} 之后, E_{i+1} 的自交数至少是 (-3), 这表明 E_{i+1} 面只有分歧轨迹奇点 p_{i+1}, p_{i+2}, 并且爆发它们得到的例外曲线都不落在分歧轨迹里.

Step 3. 设 E_{i+2} 是相应的例外曲线是爆发 p_{i+1} 得到的例外曲线. 上面的讨论告诉

我们 E_{i+2} 不在分歧轨迹里, 因此 E_{i+2} 与 E_i 的交点不是分歧轨迹奇点. 前面已知 E_l 与 E_i相交, 所以我们推出 $E_l = E_{i+2}$.

前面已证, 如果爆发 p_i 之前没有其他的例外曲线 E_k $(k < i)$经过 p_i, 那么 $n_{E_{i+1}} = n_{E_i}$. 于是 $n_{E_l} = n_{E_{i+2}} = 2n_{E_i} < 3n_{E_i}$, 矛盾! 因此爆发 p_i 之前必定有一条例外曲线 E_k经过. 此时 $n_{E_{i+1}} = n_{E_k} + n_{E_i} \leq 2n_{E_i}$. 于是 $n_{E_l} = 2n_{E_i} + n_{E_k} \leq 3n_{E_i}$. 这样我们得到 $n_{E_l} = 3n_{E_i}$, 亦即 $n_{C_1} = n_\Gamma$.

根据第一步的结论, $n_{C_1} = n_\Gamma$ 表明, 当 C_1 通过收缩最后变成 (-1)-曲线时, 其所在的纤维中只有唯一的一条不可约分支通过它. 显然这条分支就是 Γ 的像. 这意味着, $\tilde{\pi}^*(E_{i+1})$ 以及 p_{i+2} 对应的例外曲线完全原像在 $\tilde{\pi}$ 下的拉回曲线最终都必须被 ρ 收缩掉, 然后 C_1 变成 (-1)-曲线, 也被收缩掉.

因此 p_i 对应的例外曲线完全原像 $\mathcal{E}_{i+1}$ 在 $\tilde{\pi}$ 下的拉回曲线都必须被 ρ 收缩掉, 换句话讲, p_i 并不是分歧轨迹奇点, 矛盾!

这样我们就完成了证明. ■

6.3 引理 5.2 的证明

这一节我们将证明引理 5.2. ε_F 是额外收缩的 (-1)-曲线的条数 (见 § 6.1).

引理 6.3 的证明: 假设纤维中有额外收缩曲线, 我们来证明 $\alpha \leq 1$, 并且计算 ε_F 的值. 证明分成几步.

Step 1. 首先我们断言 F_r 没有重分支. 这时, 注意到 Γ_{r+1} 是 (-1)-曲线, 并且在 F_r 中的重数 $n_{\Gamma_{r+1}} = 1$, 由前面的讨论可知, Γ_{r+1} 只和纤维中的一条不可约分支相交.

事实上, 如果 F_r有一条重分支, 记为 Γ, 那么由于 f 是半稳定的，所以 Γ 必定被 ρ' 收缩掉. 按照定义, Γ 是某个 Γ_i $(i > r)$ 在 S'_r 上的严格原像. 易知 $\rho^*\Gamma$ 中的任何不可约分支也是纤维 $\tilde{F} = \rho^* F_r$ 中的重分支. 特别的, 可以找到 $\rho^*\Gamma$ 中的一个不可约分支 C_1 使得 $\tilde{\pi}(C_1) = \tilde{F}_0$ (这是因为 Γ_i 被额外收缩).

因为 F_0 不落在分歧轨迹里, 且$\tilde{F}_0$ 在纤维 $\sigma^* F_0$ 中是既约分支, 所以在纤维 $\tilde{F}$ 中 $n_{C_1} = 1$, 即 C_1 不是 $\tilde{F} = \rho^* F_r$ 中的重分支, 矛盾.

这样，我们证明了 F_r 没有重分支.

Step 2. 其次，我们断言纤维 F_0 上的所有分歧轨迹奇点中不可能有两个或两个以上全分歧的非 good-cusps 点. 进一步, 如果 $\tilde{\pi}^*\tilde{F}_0$ 是不可约的(此时由额外收缩的定义,

$\tilde{\pi}^*\tilde{F}_0 = \tilde{\Gamma}_{r+1}$) 那么 F_0 上只有一个分歧轨迹奇点.

事实上, 假设 F_0 上有两个非good-cusp 全分歧奇点, 记为 p_0 和 p_1. 设 $\mathcal{E}_1$ 和 $\mathcal{E}_2$ 是 p_0 与 p_1 对应的例外曲线在 $\tilde{P}$ 中的完全原像. 因为 p_i 不是good cusp 点, 所以 $\rho_*(\tilde{\pi}^*(\mathcal{E}_{i+1}))$ 在 S'_r中不可能是一个点.

这样 $\rho_*(\tilde{\pi}^*(\mathcal{E}_{i+1}))$ 必定与 Γ 相交(因为 p_i 是全分歧的). 因此在纤维 F_r 中, Γ_{r+1} 至少穿过F_r中的两个结点,这就和第一步的结论矛盾. 因此我们就证明了断言的前半部分. 至于断言的后半部分可以完全类似地得到.

Step 3. 我们断言 $\tilde{\pi}^*\tilde{F}_0$ 必定是可约曲线. 若不然, 由第二步的讨论可知, F_0 上只有一个分歧轨迹的奇点, 记为 p_0. 设 E_1 是爆发 p_0 所得的例外曲线. 我们来导出矛盾.

如果 E_1 不落在全分歧轨迹里, 那么易知 $\tilde{\pi}^*\tilde{F}_0$ 落在相应的原像纤维中的某个圈里面. 也就是说, 它含有不可分离点. 但是由假设, $\tilde{\pi}^*\tilde{F}_0$ 可以被额外收缩, 且在原像纤维中是既约分支, 它不可能含不可分离点, 矛盾! 因此 E_1 必定落在全分歧轨迹里. 由假设, 所有分歧轨迹的分支都是截面. 故 E_1 与 F_0 的交点不是分歧轨迹的奇点.

设 r_1 (相应的, r_2) 是 F_0 上光滑的一般分歧点(相应的, 全分歧点) 的个数. 因为 $\tilde{\pi}^*\tilde{F}_0$ 是有理曲线, 由 Hurwitz 公式以及上面的讨论可知, $r_1 + 2r_2 = 2$. 因此 $r_2 \leq 1$.

如果 $r_2 = 1$, 那么 $r_1 = 0$. 除了一个分支以外, 分歧轨迹中所有剩余的分支必须通过 p_0. 这和 P_0 是规范模型相悖. 因此 $r_2 = 0$, $r_1 = 2$. 由于 P_0 是规范模型, 我们立刻得到 $\alpha \leq 1$. 此时要求 $\mathrm{mult}_{p_0}(D_1) = 2g + 2 - \alpha \leq g + 2$, 矛盾!

这样我们证明了 $\tilde{\pi}^*\tilde{F}_0$ 必定是可约曲线.

Step 4. 由上可知, $r_2 = 0$, 并且 F_0 上不可能有 good cusp 点以及 Type 1 奇点.

如果 F_0 至少有两个全分歧的分歧轨迹奇点, 那么 $\tilde{\pi}^*\tilde{F}_0$ 中的任何分支都落在原像纤维的某个圈里, 因而不可能有额外收缩, 矛盾! 所以 F_0 至多只有一个全分歧的奇点. 再次利用 P_0 是规范模型的条件, 我们就得到 $\alpha \leq 1$.

通过类似的讨论, 还可以断言 F_0 有且只有一个分歧轨迹的奇点能够提供额外收缩曲线, 记为 p_0. 显然, 此时 p_0 只能是某个 Type k (m, α) 奇点, 其中 $m + 2\alpha \leq g + 2$, $k = 3, 4, 6$.

我们计算一下对不同类型的 p_0, 它提供多少额外收缩的 (-1)-曲线.

如果 p_0 是 Type 3 (m, α) (要求 $m + \alpha \geq 2$), 通过典范解消和直接计算可知, 它提供了 2 条额外收缩的 (-1)-曲线. 如果 p_0 是 Type 3 $(1 - \alpha, \alpha)$, 那么它提供了 3 条额外收缩的 (-1)-曲线.

如果 p_0 是 Type 4 (m,α), 那么它提供了 1 条额外收缩的 (-1)-曲线.

如果 p_0 是 Type 6 (m,α) (要求 $m\geq 2$), 此时必有 $\alpha=0$. 它提供了 1 条额外收缩的 (-1)-曲线. 如果 p_0 是 Type 6 $(1,0)$, 那么它提供了 2 条额外收缩的 (-1)-曲线.

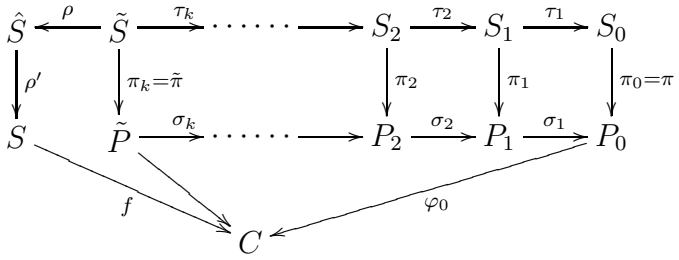
爆发 p_0 后, 我们得到一条新的原像纤维, 它上面有一些新的分歧轨迹的奇点. 现在我们对这条原像纤维上的分歧轨迹的奇点重复上面的讨论, 并且计算它们提供了多少额外收缩曲线. 依此类推, 最终我们得到额外收缩曲线条数的计算公式:

$$\begin{aligned}\varepsilon_F = &\sum_{2\leq m+\alpha\leq\frac{g+1}{2}} 2s_3''(m,\alpha)+3s_3''(1-\alpha,\alpha)+\sum_{2\leq m+\alpha\leq\frac{g+2}{2}} s_4''(m,\alpha)\\ &+\sum_{2\leq m\leq\frac{g+2}{2}} s_6''(m,0)+2s_6''(1,0).\end{aligned}$$

至此我们完成了整个证明. ■

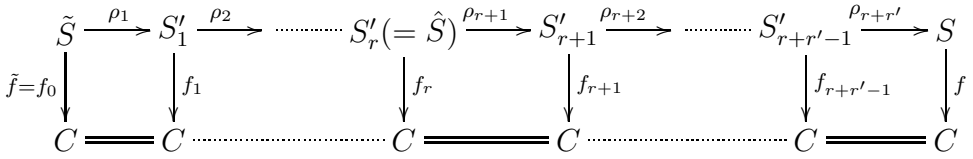
第七章　半稳定纤维化的不变量

以下总假设 $f : S \to C$ 满足 § 5.1 的假设条件. 回顾交换图(4-2).



此处 $\tilde{\pi}$ 是 π 的典范解消. 设 E_i 是 σ_i 的例外曲线, $\mathcal{E}_{i+1}$ 是 E_i 在 $\tilde{P}$ 中的完全原像. 设 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k : \tilde{P} \to P_0$. $\tilde{R} = \tilde{D}_1 + 2\tilde{D}_2$ 是三次覆盖 $\tilde{\pi}$ 的分歧轨迹. 设 F_0 是 P_0 的纤维, $\alpha = D_2 F_0$, 其中 D_2 是 π 的全分歧轨迹.

$\rho : \tilde{S} \to \hat{S}$ 收缩典范解消下奇点例外集中所有的 (-1)-曲线. ρ' 收缩 $f\rho' : \hat{S} \to C$ 的纤维中剩余的 (-1)-曲线. ρ 和 ρ'都是由一些blow-downs 复合而成, 即 $\rho = \rho_r \rho_{r-1} \cdots \rho_1$ 以及 $\rho' = \rho_{r+r'} \cdots \rho_{r+1}$.



令 $\varepsilon_P = r$, $\varepsilon_F = r'$, $\varepsilon = r + r'$.

7.1　亏格 3 纤维化的不变量

设 $f : S \to C$ 是半稳定亏格 3 非超椭圆纤维化. 我们可设 $s_k(w) = \sum_{m+n=w} s_k(m,n)$, $s'_k(w) = \sum_{m+n=w} s'_k(m,n)$, 以及 $s''_k(w) = \sum_{m+n=w} s''_k(m,n)$. 此处 $\sum_{m+n=w}$ 跑遍所有满足 $m + n = w$ 的可能值.

设 F 是 f 的一条纤维, F 的 Horikawa 数定义为 (见 [46])

$$H_F := \text{length coker } (S^2 f_* \omega_{S/C} \hookrightarrow f_*(\omega_{S/C}^{\otimes 2}))_p,\ p = f(F)$$

这是纤维的非负不变量. 如果 $H_F \neq 0$, 那么 F 是奇异纤维或者光滑超椭圆纤维.

Ashikaga 和 Konno 在 [6] 中定义了更为一般的情形下的 Horikawa 数. 纤维化 f 的整体不变量依赖于这个数. 事实上, M. Reid [46] 证明了

$$K_f^2 - 3\chi_f = \sum_F H_F,$$

这里 F 跑遍所有纤维, 定义如下:

我们考虑的是直纹面上的三次覆盖所诱导的半稳定亏格 3 非超椭圆纤维化. 在 § 2.3 中我们定义了分歧轨迹的奇点的 Horikawa 数(也可见 [12]). 设 F' 是 F 在直纹面 P_0 上的像. 于是我们有

$$H_F = \sum_{p \in F'} H_p + \varepsilon_{F'},$$

这里 $\varepsilon_{F'}$ 是纤维 F 对应的额外收缩 (-1)-曲线的条数, p 跑遍所有落在 F' 中的分歧轨迹奇点.

注意到此时的规范模型保证了 $w_i \leq 3$ 对所有分歧轨迹奇点成立. 利用式 (3-7), 我们立刻得到 $H_F \geq 0$, 从而 $K_f^2 \geq 3\chi_f$.

进一步, 利用奇异性指数以及上面的公式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} K_f^2 - 3\chi_f =& 2s_1(1) + 2s_1(2) + s_3(2) + 2s_5(1) \\ &+ 3s_5(2) + s_6(2) + s_6(3) + \varepsilon_F. \end{aligned}$$

再利用下一节的计算结果, 我们有

$$\begin{aligned} e_f =& \sum_{w=1}^{2} s_1(w) + 3\sum_{w=1}^{2} s_3(w) + 3\sum_{w=2}^{3} s_4(w) \\ &+ \sum_{w=1}^{2} s_5(w) + 2\sum_{w=1}^{3} s_6(w) - \varepsilon_F. \end{aligned} \tag{7-1}$$

由 Noether 公式, 引理 5.2 以及上面的计算公式, 我们立刻得到半稳定亏格 3 非超椭圆纤维化的不变量计算公式.

$$\begin{aligned} K_f^2 =& \frac{1}{3}s_0 + \frac{4}{3}s_1 + 3s_2, \\ \chi_f =& \frac{1}{9}s_0 + \frac{1}{9}s_1 + \frac{1}{3}s_2, \\ e_f =& s_0 + s_2, \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} s_0 =& 3(s_3'(1) + s_3'(2) + s_4'(2) + s_4(3)) + 2(s_6'(1) + s_6'(2) + s_6(3) + s_4''(2)), \\ s_1 =& s_3'(2) + s_5(2) + s_6'(2) + s_6(3) + s_4''(2) + 3s_3''(1) + s_3''(2) + 2s_6''(1), \\ s_2 =& s_1(1) + s_1(2) + s_5(1) + s_5(2) + s_3''(2) + s_6''(2). \end{aligned}$$

由前面的讨论, 当 $\alpha \geq 2$ 时成立, 额外收缩不出现, 即 $\varepsilon_F = 0$. 进一步, 如果 $\alpha \geq 3$, 那么 $s_5(2) = 0$. 此时由直接计算可知 $2s_0 \geq s_1$. 于是

$$9\chi_f - K_f^2 = \frac{1}{3}(2s_0 - s_1) \geq 0.$$

如果 $\alpha = 2$, 那么由于 $s_0 + s_2 \geq s_1$, 因此我们有

$$\frac{39}{4}\chi_f - K_f^2 = \frac{1}{4}(3s_0 + s_2 - s_1) \geq 0.$$

谈胜利和陈志杰曾经 [12] 估计了亏格 3 非超椭圆纤维化的斜率上界. 如果 $\alpha = 2$, 我们的结果要比 [12] 的结果稍好一点. 但仍然不是最佳上界. 事实上, 如果 $\alpha = 2$ 且 $\lambda_f = \frac{39}{4}$, 那么由上式可知 $s_0 = 0$, $s_1 = s_2$. 于是分歧轨迹的奇点只能是 good cusps 或者 Type 5 $(2, 0)$. 但是我们知道, D_1 与 D_2 必定相交, 这个交点也是分歧轨迹的奇点, 但是它不属于上述任何一种奇点类型, 这就导出矛盾. 因此这时的斜率上界不是最佳的.

现在我们要证明, 在半稳定情形下 s_0 是纤维中不可分离点的个数, s_2 是可分离点的个数. 设 F 是 S 的纤维, $\tilde{F}$ 是 $\tilde{S}$ 中相应的原像纤维, F_0 是 P_0 中相应的像纤维. 设 $p \in F$ 一个可分离点.

如果 p 在 $\tilde{F}$ 中的原像是曲线, 那么它的原像中所有不可约曲线都是 $\tilde{F}$ 中的重分支,

因此这些曲线必定是由奇点引入的 (-1)-曲线. 另一方面, p 的原像中的曲线不可能来自于 Type 4 和 Type 6 奇点, 否则 p 必定落在纤维中的某个圈里面, 这是与可分离点的定义相矛盾的. 这样, p 的原像中的不可约曲线只能来自于 Type 1, Type 3 和 Type 5 奇点.

假设 p 的原像中某不可约曲线来自于 Type 3 奇点, 由定义, 这个奇点是全分歧的分歧轨迹奇点. 此时如果 F_0 上含有其他全分歧点, 那么 p 必定不是可分离点, 这是矛盾的. 因此 F_0 不含其他全分歧的点. 利用 P_0 是规范模型的假设, 我们得到 $\alpha \leq 1$, $\varepsilon_F > 0$. 这意味着这个 Type 3 奇点提供额外收缩. 因为 Type 3 $(1-\alpha, \alpha)$ 倘若提供额外收缩的话, 那么所有分支都将被收缩掉, 这样 p 只能是 F 上的光滑点, 矛盾! 因此这个奇点只能是 Type 3 $(2-\alpha, \alpha)$.

如果 p 在 $\tilde{F}$ 中的原像是点, 我们可设 p' 是 p 在像纤维 $\tilde{F}_0$ 中的像. 类似上面的讨论可知, p_i 不在分歧轨迹里而且 F_0 不含其他全分歧点. 于是 $\alpha \leq 1$, $\varepsilon_F > 0$. 因此这时 p 只能落在某个 Type 6 奇点里面. 因为 Type 6 $(1,0)$ 倘若提供额外收缩的话, 那么所有分支都将被收缩掉, 这样 p 只能是 F 上的光滑点, 这与 p 的选取矛盾. 因此 p 只能在 Type 6 $(2,0)$ 里面.

因此 s_2 就是可分离点的个数. 因为 $e_f = s_0 + s_2$ 恰好是纤维中结点的个数, 所以 s_0 就是不可分离点的个数. 这样我们证明了定理 1.1.

对非半稳定情形, 我们可以利用稳定约化 $\pi : \tilde{C} \to C$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \dashrightarrow & S \\ {\scriptstyle \tilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \tilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

谈胜利 [51] 的计算公式, 我们有($d = \deg \pi$)

$$\begin{aligned} K_f^2 &= \frac{K_{\tilde{f}}^2}{d} + \sum_F c_1^2(F), \\ e_f &= \frac{e_{\tilde{f}}}{d} + \sum_F c_2(F), \\ \chi_f &= \frac{e_{\tilde{f}}}{d} + \sum_F \chi_F. \end{aligned}$$

这里 $c_1^2(F)$, $c_2(F)$, χ_F 都是奇异纤维 F 的非负不变量. 它们为 0 当且仅当 F 半稳定.

进一步, 对原子纤维, 都可以验证 M. Reid 猜想 [46] 是正确的. 所谓原子纤维就是经

过形变不能变成一些更简单的纤维. 原子纤维 F 有以下四种类型.

(0) F 是带有一个结点的不可约曲线, 并且它是非超椭圆的.

(1) F 是光滑超椭圆曲线.

(2) $F = E + C$, 其中 E 是亏格 1 不可约曲线, C 是亏格 2 不可约曲线, 两者正常交于一点.

(3) $F = 2C$, 其中 C 光滑的亏格 2 曲线, 且 $\mathcal{O}_C(C)$ 是非零的 2-torsion class.

对第 (3) 型的原子纤维, 经过 $d(=2)$ 次基变换, 就变成了亏格 3 超椭圆纤维, 且有 $c_1^2(F) = 4$, $c_2(F) = 2$. 这种奇异纤维对不变量的影响值恰好与 M. Reid 的猜想公式吻合.

7.2 一般情形的不变量公式

由推论 4.1, 以及公式 (4-8) 和 (4-9) 并且回忆等式 $r_{\tilde{D}_i} = -2t_i$ (见 § 4.3), 我们得到

$$\begin{aligned} 3(g+1)K_f^2 = &\sum_{i=0}^{k} c(m_i, n_i) + 3(g+1)\varepsilon \\ &- \left(3g - 1 - \frac{g-3}{2g+3-2\alpha}\right) t_1 - 8(g-1)t_2 \qquad (7\text{-}2) \\ e_f = &-2t_1 - 4t_2 + 3k - \varepsilon, \qquad (7\text{-}3) \end{aligned}$$

其中 t_i 是在爆发 $\sigma : \tilde{P} \to P_0$ 中那些落在分歧轨迹 $\tilde{D}_i$ 里的不可约例外曲线的条数, 并且

$$c(m,n) = \frac{(2g-6)(g+2-\alpha-m)m}{2g+3-2\alpha} - 8(m+n)^2 + 8(g+2)(m+n) - 9(g+1).$$

由分歧轨迹奇点分类的结果, 我们有

$$\begin{aligned} t_1 &= \sum_{m,n} s_3(m,n) + \sum_{m} s_5(m,0) \\ t_2 &= 2s_0 + 2\sum_{m,n} s_1(m,n) \\ \varepsilon_P &= 4s_0 + 3\sum_{m,n} s_1(m,n) + \sum_{m,n} s_3(m,n) \\ &\quad + 3\sum_{m} s_5(m,0) + \sum_{m} s_6(m,0) \end{aligned}$$

此处 $\sum_{m,n}$ 跑遍局部不变量 m_i, n_i 所有可能值(见 § 2.3), s_0 表示 good cusp 点的个数(与上一节的记号含义不同).

和式 $\sum_{i=0}^{k} c(m_i, n_i)$ 也可以通过每一类奇点的贡献值被局部地计算出来. 比如, 对 Type 1 (m, n) 奇点 p_i, 由前已知它包含无穷接近点 p_{i+1}连同其局部不变量 $(m_{i+1}, n_{i+1}) = (m, n+1)$; p_{i+2} 连同其局部不变量 $(m_{i+2}, n_{i+2}) = (0, 2)$; 以及 p_{i+3} 连同其局部不变量 $(m_{i+3}, n_{i+3}) = (m, n+2)$ (见 § 5.1). 这样它对和式 $\sum_{i=0}^{k} c(m_i, n_i)$ 的贡献就是 $c(m, n) + c(m, n+1) + c(0, 2) + c(m, n+2) = 3c(m, n+1) + 7g - 25$.

注意到 $\varepsilon = \varepsilon_P + \varepsilon_F$ 以及

$$\begin{aligned} k = 4s_0 + 4\sum_{m,n} s_1(m,n) + 3 \sum_{m,n,m',n'} + 2\sum_{m,n} s_3(m,n) \\ + \sum_{m,n} s_4(m,n) + 2\sum_{m} s_5(m,0) + \sum_{m} s_6(m,0), \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} e_f =& \sum_{m,n} s_1(m,n) + 3\sum_{m,n} s_3(m,n) + 3\sum_{m,n} s_4(m,n) \\ &+ \sum_{m} s_5(m,0) + 2\sum_{m} s_6(m,0) - \varepsilon_F, \qquad (7\text{-}4) \\ 3(g+1)K_f^2 =& \frac{6(g-3)(g+1-2\alpha)}{2g+3-\alpha} s_0 + \sum_{m,n} c_1(m,n)s_1(m,n) \\ &+ \sum_{m,n} c_3(m,n)s_3(m,n) + \sum_{m,n} c_4(m,n)s_4(m,n) \\ &+ \sum_{m} c_5(m,0)s_5(m,0) + 2\sum_{m} c_6(m,0)s_6(m,0) + 3(g+1)\varepsilon_F, \qquad (7\text{-}5) \end{aligned}$$

此处

$$\begin{aligned} c_1(m,n) =& 3c(m,n+1), \\ c_3(m,n) =& 2c\left(m+\frac{1}{2}, n\right), \\ c_4(m,n) =& c(m,n), \\ c_5(m,0) =& 6g+6+2c\left(m+\frac{1}{2}, 0\right), \end{aligned}$$

$$c_6(m,0) = 3g+3+c(m,0).$$

容易验证, 每一种奇点前面的系数 $c_k(m,n)$ 都是非负的. 由引理 5.2, 当 $\alpha \geq 2$ 时, $\varepsilon_F = 0$; 当 $\alpha \leq 1$ 时, ε_F 由式 (5-1) 给出. 这样我们可以用奇异性指数计算任意亏格的三点式纤维化的不变量.

这些奇异性指数满足一个线性关系. 回顾公式 (4-7)

$$\frac{\alpha}{4g+6-4\alpha} r_{D_1} + \frac{g+2-\alpha}{\alpha-1} r_{D_2} - D_1 D_2 = 0.$$

设

$$u(m,n) = \frac{\alpha}{4g+6-4\alpha}(4m^2-2m) + \frac{g+2-\alpha}{\alpha-1}(n^2-n) - 2mn.$$

由式(4-8), (4-9) 及(2-5), 我们有

$$\begin{aligned} 0 =& 3u(1,0)s_0 + \sum_{m,n} u_1(m,n)s_1(m,n) \\ &+ \sum_{m,n} u_3(m,n)s_3(m,n) + \sum_{m,n} u_4(m,n)s_4(m,n) \\ &+ \sum_{m} u_5(m,0)s_5(m,0) + 2\sum_{m} u_6(m,0)s_6(m,0), \end{aligned} \tag{7-6}$$

此处

$$\begin{aligned} u_1(m,n) =& 3u(m,n+1), \\ u_3(m,n) =& 2u\left(m+\frac{1}{2},n\right), \\ u_4(m,n) =& u(m,n), \\ u_5(m,0) =& 2u\left(m+\frac{1}{2},0\right), \\ u_6(m,0) =& u(m,0). \end{aligned}$$

第八章　三点式纤维化的斜率上界

以下我们总是假设 $\alpha \geq 2$ 且 $g \geq 4$.

设

$$Q(x,y) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x+y)^2 - (\alpha-1)(g-3)(x+y)y + \frac{g(g-3)}{2}y^2,$$

此处 $x, y \in \mathbb{Z}$. 通过直接计算, 易知这是一个正定二次型.

设

$$r = \min_{y \equiv \alpha \pmod 2} Q(x,y).$$

令

$$\lambda_0 = 12 - \frac{24(\alpha-1)\alpha}{\alpha g(g+3\alpha-6) - 2r}$$

为了证明 $\lambda_f \leq \lambda_0$, 我们利用 Noether 公式, 只需证明 $\mu_0 e_f \geq K_f^2$ 即可, 其中 $\mu_0 = \frac{\lambda_0}{12-\lambda_0}$.

令 $\theta_0 = \frac{2(g-3)(g+1-\alpha)}{3\alpha(g+1)}$. 回顾关系式 (7-6). 为了证明 $\mu_0 e_f \geq K_f^2$, 我们只需证明

$$0 \leq \mu_0 e_f - K_f^2 + \theta_0 \left(3u(1,0)s_0 + \sum_k \sum_{m,n} u_k(m,n) s_k(m,n) \right).$$

利用不变量公式 (7-4), 相当于证明

$$\begin{aligned} 0 \leq & \sum_{m,n} \left(\mu_0 - \frac{c_1(m,n)}{3g+3} + \theta_0 u_1(m,n) \right) s_1(m,n) \\ & + \sum_{m,n} \left(3\mu_0 - \frac{c_3(m,n)}{3g+3} + \theta_0 u_3(m,n) \right) s_3(m,n) \\ & + \sum_{m,n} \left(3\mu_0 - \frac{c_4(m,n)}{3g+3} + \theta_0 u_4(m,n) \right) s_4(m,n) \end{aligned}$$

$$+\sum_m\left(\mu_0-\frac{c_5(m,0)}{3g+3}+\theta_0u_5(m,0)\right)s_5(m,0)$$
$$+\sum_m\left(2\mu_0-\frac{c_6(m,0)}{3g+3}+\theta_0u_6(m,0)\right)s_6(m,0).$$

为了方便起见, 我们记 $\bar{m}=g+2-\alpha-2m$ 以及 $\bar{n}=\alpha-2n$. 通过直接计算, 我们得到

$$-\frac{c(m,n)}{3g+3}+\theta_0u(m,n)=-\frac{\eta_0}{3}+\frac{Q(\bar{m},\bar{n})}{3\alpha(\alpha-1)},$$

此处 $\eta_0=\frac{3g-2}{2}+\frac{g(g-3)}{2\alpha-2}$.

这样, 上面的不等式可以写为

$$\begin{aligned}0\leq&\sum_{m,n}\left(\mu_0-\eta_0+\frac{Q(\bar{m},\bar{n}-2)}{\alpha(\alpha-1)}\right)s_1(m,n)\\&+\sum_{m,n}\left(3\mu_0-\frac{2\eta_0}{3}+\frac{2Q(\bar{m}-1,\bar{n})}{3\alpha(\alpha-1)}\right)s_3(m,n)\\&+\sum_{m,n}\left(3\mu_0-\frac{\eta_0}{3}+\frac{Q(\bar{m},\bar{n})}{3\alpha(\alpha-1)}\right)s_4(m,n)\\&+\sum_{m}\left(\mu_0-\frac{2\eta_0}{3}-2+\frac{2Q(\bar{m}-1,\alpha)}{3\alpha(\alpha-1)}\right)s_5(m,0)\\&+\sum_{m}\left(2\mu_0-\frac{\eta_0}{3}-1+\frac{Q(\bar{m},\alpha)}{3\alpha(\alpha-1)}\right)s_6(m,0).\end{aligned}$$

为了证明这个不等式, 我们只需要检验每一个奇异性指数前面的系数都是非负实数就足够了. 也就是说, 我们需要检验下面的各个不等式.

(1) $\mu_0-\eta_0+\frac{Q(\bar{m},\bar{n}-2)}{\alpha(\alpha-1)}\geq 0$

(2) $3\mu_0-\frac{2\eta_0}{3}+\frac{2Q(\bar{m}-1,\bar{n})}{3\alpha(\alpha-1)}\geq 0$

(3) $3\mu_0-\frac{\eta_0}{3}+\frac{Q(\bar{m},\bar{n})}{3\alpha(\alpha-1)}\geq 0$

(4) $\mu_0-\frac{2\eta_0}{3}-2+\frac{2Q(\bar{m}-1,\alpha)}{3\alpha(\alpha-1)}\geq 0$

(5) $2\mu_0-\frac{\eta_0}{3}-1+\frac{Q(\bar{m},\alpha)}{3\alpha(\alpha-1)}\geq 0$.

因为 $Q(x,y)\geq r$ 且 $\frac{Q(x,\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{1}{2}(x+\alpha-g+3)^2+\frac{3(g-3)}{2}+\frac{g(g-3)}{2\alpha-2}$, 所以我们只需验证以下的诸不等式成立.

(1′) $\mu_0-\eta_0+\frac{r}{\alpha(\alpha-1)}\geq 0$

(2′) $3\mu_0-\frac{2\eta_0}{3}+\frac{2r}{3\alpha(\alpha-1)}\geq 0$

(3′) $3\mu_0 - \frac{\eta_0}{3} + \frac{r}{3\alpha(\alpha-1)} \geq 0$

(4′) $\mu_0 - \frac{2\eta_0}{3} - 2 + \frac{2}{3}(\frac{3(g-3)}{2} + \frac{g(g-3)}{2\alpha-2}) \geq 0$

(5′) $2\mu_0 - \frac{\eta_0}{3} - 1 + \frac{1}{3}(\frac{3(g-3)}{2} + \frac{g(g-3)}{2\alpha-2}) \geq 0.$

很明显 (1′) 蕴含了 (2′) 和 (3′); 同样 (4′) 蕴含了 (5′). 通过直接计算,我们可以知道 $\mu_0 - \eta_0 + \frac{r}{\alpha(\alpha-1)} = 0$. 因此 (1′) 成立.

现在我们检验 (4′). 因为 $\mu_0 = \eta_0 - \frac{r}{\alpha(\alpha-1)}$ 且 $r \leq Q(-1,1) = \frac{g(g-3)}{2}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mu_0 - \frac{2\eta_0}{3} - 2 + \frac{2}{3}\left(\frac{3(g-3)}{2} + \frac{g(g-3)}{2\alpha-2}\right) \\
&= \frac{\eta_0}{3} - \frac{r}{\alpha(\alpha-1)} - 2 + \frac{2}{3}\left(\frac{3(g-3)}{2} + \frac{g(g-3)}{2\alpha-2}\right) \\
&\geq \frac{\eta_0}{3} - \frac{g(g-3)}{2\alpha(\alpha-1)} - 2 + \frac{2}{3}\left(\frac{3(g-3)}{2} + \frac{g(g-3)}{2\alpha-2}\right) \\
&= \frac{9g-32}{6} + \frac{g(g-3)}{2\alpha} \geq 0.
\end{aligned}$$

当 $\alpha = g+2$ 时, 总有 $x = 0$ 及 $\alpha \equiv g \pmod 2$. 因此,

$$r = \begin{cases} 0, & g \text{ 是偶数}, \\ 2g+4, & g \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

此时 $\eta_0 = \frac{(g-1)(2g+1)}{g+1}$. 于是我们有

$$\lambda_f \leq \begin{cases} 12 - \frac{6(g+1)}{g^2}, & g \text{ 是偶数}, \\ 12 - \frac{6}{g-1}, & g \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

至此我们完成了定理1.2 的证明.

第九章　n 次覆盖奇点的数值分类

在三次覆盖的情形, 我们给出了分歧轨迹的奇点的一个数值分类. 对于 n 次覆盖, 我们可也有类似的数值分类. 本章将简单介绍一下相关的内容. 具体细节可以参见 [36].

设 P_0 是光滑曲面, $\pi : S_0 \to P_0$ 是正规的 n 次覆盖, 且设 $\deg \pi = n$. 设 B 是 π 的分歧轨迹 (不必既约).

9.1　n 次覆盖的奇点解消

S_0 上所有奇点的解消 $\tau : \tilde{S} \to S_0$ 来自下面的交换图.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\eta} & S_k & \xrightarrow{\tau_k} & \cdots\cdots & \longrightarrow & S_2 & \xrightarrow{\tau_2} & S_1 & \xrightarrow{\tau_1} & S_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_k} & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0=\pi} \\ \tilde{P} & = & P_k & \xrightarrow{\sigma_k} & \cdots\cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & P_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & P_0 \end{array} \tag{9-1}$$

其中 σ_{i+1} 是 P_i 在 π_i 的分歧轨迹奇点 p_i 处的爆发. S_{i+1} 是 $P_{i+1} \times_{P_i} S_i$ 的正规化. π_k 的分歧轨迹的奇点都是通常二重点. η 是关于 S_k 上所有 Hirzbruch 奇点的极小解消. $\tilde{\pi} = \pi_k \eta$.

设 E_i 是 σ_i 的例外曲线, 且 $\mathcal{E}_{i+1}$ 是 E_i 在 $\tilde{P}$ 中的完全原像. 设 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k : \tilde{P} \to P_0$. 我们可以假设 σ 是分歧轨迹 B 的所有奇点的嵌入解消 (见 § 4.1).

9.2　分歧轨迹奇点的数值分类

设 $p \in P_0$ 是 π 的全分歧的分歧轨迹奇点, E_1 是 σ_1 对应的例外曲线. 设 $\mathcal{E}_1$ 是 E_1 在 $\tilde{P}$ 中的完全原像.

为书写方便, 设 $W_0 = \tilde{\pi}^* \mathcal{E}_1$, Z_1 是支集在 $\mathrm{supp}(W_0)$ 上的基本闭链. 设 s_1 是满足以下条件的最大有理数: $W_1 = W_0 - s_1 Z_1 \geq 0$. 易知 $\mathrm{supp}(W_1)$ 所含的不可约分支个数严格小于 $\mathrm{supp}(W_0)$ 的不可约分支个数.

进一步, 设 Z_2 是支集在 $\mathrm{supp}(W_1)$ 上的基本闭链. 设 s_2 是满足以下条件的最大有理数: $W_2 = W_1 - s_2 Z_2 \geq 0$. 我们对 W_2 重复上面的讨论. 依此类推, 由于每次都使 W_i 的不可约分支个数严格减小, 所以在有限步后, 我们就得到了以下的公式:

$$\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_1 = \sum_{k=1}^{h} s_k Z_k,$$

其中 Z_k 都是其自身支集上的基本闭链, s_k 是正有理系数, 且 $Z_k > Z_l$ $(k < l)$. 由构造过程可知, 上面的分解是唯一的.

更一般地, 对 π_i 的分歧轨迹奇点 p_i, $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1}$ 有以下的唯一分解.

$$\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} = \sum_{k=1}^{h} s_k^{(i)} Z_k^{(i)}, \tag{9-2}$$

其中 $Z_k^{(i)}$ 都是其自身支集上的基本闭链, $s_k^{(i)}$ 是正有理系数, 且 $Z_k^{(i)} > Z_l^{(i)}$ $(k < l)$.

因为这些 $Z_k^{(i)}$ 不一定是连通除子, 所以可设 $Z_k^{(i)} = \sum_{l=1}^{h_k} Z_{kl}^{(i)}$, 其中诸 $Z_{kl}^{(i)}$ 分别是 $Z_k^{(i)}$ 的各个连通分支上的基本闭链. 这样上式就改写为

$$\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} = \sum_{k=1}^{h} \sum_{l=1}^{h_k} s_k^{(i)} Z_{kl}^{(i)}. \tag{9-3}$$

按照诸 $(Z_{kl}^{(i)})^2$ 以及 s_i 的不同取值, 我们可以给出分歧轨迹的奇点的数值分类.

比如在三次覆盖情形, 我们已证所有的 $s_k^{(i)} = 1$. 这时按照诸 $(Z_{kl}^{(i)})^2$ 的取值, 我们就得到 § 3.1 的数值分类.

又如在四次覆盖的情形, 我们可以证明, 对每个 p_i, 要么 $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} = 2Z_1^{(i)}$, 要么 $\tilde{\pi}^* \mathcal{E}_{i+1} = \sum_{k=1}^{h} Z_k^{(i)}$, $h \leq 4$. 这样我们也可以仿照三次覆盖的情形, 对分歧轨迹的奇点分类.

为了说明这种数值分类的优越性, 我们用它来分析奇点解消引入的 (-1)-曲线.

设 $\tau : \tilde{S} \to S_0$ 是 π 的奇点解消 (见上一节的交换图). 设 $\rho : \tilde{S} \to \hat{S}$ 收缩了所有由奇点引入的 (-1)-曲线, 亦即 ρ 由以下的 blowing-down 复合而成.

$$\tilde{S} \xrightarrow{\rho_1} S_1' \xrightarrow{\rho_2} \cdots\cdots \longrightarrow S_{r-1}' \xrightarrow{\rho_r} S_r' (= \hat{S}) \tag{9-4}$$

其中ρ_i 收缩 (-1)-曲线 C_i. 我们用花体字母 $\mathcal{C}_i$ 表示 C_i 在ρ 下的完全原像. 在不致于引起混淆的情况下, 我们仍然用 C_i 表示它在 ρ 下的严格原像.

回顾式 (9-4) 的分解. 我们定义两个集合

$$\mathcal{A} = \{(i,k,l) \mid (Z_{kl}^{(i)})^2 = -1, \text{且} \, p_a(Z_{kl}^{(i)}) = 0\},$$
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{C}_j \mid \ j = 1, 2, \cdots, r\}.$$

类似 § 3.2 的讨论, 我们可以证明

命题 9.1　在上述两个集合间存在一一对应, 即 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $(i,k,l) \to Z_{kl}^{(i)}$ 是一个双射. 因此, 由奇点引入的 (-1)-曲线条数恰好就是集合 $\mathcal{A}$ 中的元素个数.

参 考 文 献

[1] S. Ju. Arakelov: Families of algebraic curves with fixed degeneracy, Math. USSR Izv., **5**(1971), 1277–1302.

[2] T. Ashikaga: Normal two-dimensional hypersurface triple points and Horikawa type resolution, Tohoku Math. J., **44**(1992), 177–200.

[3] M. Artin: Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math., **84**(1962), 485–496.

[4] M. Artin: On Isolated Rational Singularities of Surfaces, Amer. J. Math., **88**(1966), 129–136.

[5] M. Artin, G. Winters: Degenerate fibres and stable reduction of curves, Topology, **10**(1971), 373–383.

[6] T. Ashikaga, K. Konno: Global and local properties of pencils of algebraic curves, Algebraic Geometry 2000, Azumino, Advanced Studies in Pure Mathematics, **36**(2000), 1–49.

[7] M. A. Barja: On the slope of bielliptic fibrations, Proc. AMS, **129**(2001), 1899–1906.

[8] M. A. Barja, F. Zucconi: On the slope of fibred surfaces, Nagoya Math. J., **164**(2001), 103–131.

[9] M. A. Barja, F. Zucconi: A note on a conjecture of Xiao, J. Math. Soc. Japan, **52**, no. 3 (2000), 633–635.

[10] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven: Compact Complex Surfaces, Springer-Verlag, 1984.

[11] Z. Chen: On the lower bound of the slope of a non-hyperelliptic fibration of genus 4, Intern. J. of Math., **4**(1993), 367–378.

[12] Z. Chen, S.-L. Tan: Upper bounds on the slope of a genus 3 fibration, in Recent Progress on Some Problems in Several Complex Variables and Partial Differential Equations, Contemporary Math., **400**(2006), 65–88.

[13] Z. Chen, J. Lu, S.-L. Tan: On the upper bound of the slope of a trigonal fibration. (Preprint 2007)

[14] M. Cornalba, J. Harris: Divisor classes associated to families of stable varieties, with application to the moduli space of curves, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **21**(1988), 455-475.

[15] P. Deligne, D.Mumford: The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. IHES, **36**(1969), 75–109.

[16] H. Esnault, E. Viehweg: Effective bounds for semipositive sheaves and the height of points on curves over complex function fields, Compositio Mathematica **76**(1990), 69–85.

[17] E. Horikawa: On deformations of quintic surfaces, Inv. Math., **31**(1975), 43–85.

[18] R. Hartshorne: Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math **52**, Springer-Verlag, (1977).

[19] E. Horikawa: On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, In: Complex Analysis and Algebraic Geometry, a volume dedicated to K. Kodaira, 79–90, Tokoyo and Cambridge, Iwanami Shoten Publishers and Cambridge Univ. Press (1977).

[20] E. Horikawa: Local deformation of pencils of curves of genus two, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **64** (1988), 241–244.

[21] E. Horikawa: Notes on canonical surfaces, Tohoku Math. J., **43**(1991), 141–148.

[22] E. Horikawa: Certain degenerate fibres in pencils of curves of genus three. (Preprint 1990)

[23] J. Kollàr: Complex algebraic geometry, IAS/Park City Mathematics Series, **3** (1997).

[24] K. Kodaira: On complex analytic surfaces I: Ann. of Math., **71**(1960), 111–152; II: Ann. of Math., **77**(1963), 563–626; III: Ann. of Math., **78**(1963), 1–40.

[25] K. Kodaira: On the structure of compact complex analytic surfaces I: Amer. J. Math., **86**(1964), 751–798; II: Amer. J. Math., **88**(1966), 682–721; III: Amer. J. Math., **90**(1969), 55–83; IV: ibid, 1048–1066.

[26] K. Kodaira: A certain type of irregular algebraic surfaces, J. Anal. Math., **19** (1967) 207 – 215.

[27] K. Konno: A note on surface with penciles of non-hyperelliptic curves of genus 3, Osaka J. Math., **28** (1991), 737–745.

[28] K. Konno: Non-hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, **20** (1993), 575–595.

[29] K. Konno: A lower bound of the slope of trigonal fibrations, Intern. J. Math., **7** (1996), 19–27.

[30] K. Konno: Clifford index and the slope of fibered surfaces, J. Alg. Geom., **8** (1999), 207–220.

[31] K. Konno: Certain algebraic surfaces with non-reduce moduli space, Portugal. J. Math., Vol. **57**, Fasc.2 (2000), 169–178.

[32] K. Konno, M. Mendes Lopes: On a question of Miles Reid, Manuscripta Math., **100** (1999), 81–86.

[33] H. B. Laufer: Normal two-dimensional singularities, Ann. Math. Studies, no. **71**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., (1971)

[34] H. B. Laufer: On μ for surface singularities, Several Complex Variables, Part I (Wells, R. O., eds.), Proc. of Symposia in Pure Math., **30**, Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., (1997), 45–49.

[35] H. B. Laufer: On minimally elliptic singularitiess, Amer. J. Math., **99** (1977), 1257-1295.

[36] J. Lu: Classification of singularities of n-tuple covers. (Preprint 2006)

[37] S. Matsusaka: Some numerical invariants of hyperelliptic fibratons, J. Math. Kyoto Univ., **30**(1990), 33–57.

[38] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, vol. **61**, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1968)

[39] R. Miranda: Triple covers in algebraic geometry, Amer. J. Math., **107**(1985), 1123–1158.

[40] Y. Namikawa, K. Ueno: On fibers in families of curves of genus two I. Singular fibers of elliptic type, in: Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in Honor of Y. Akizuki Kinokuniya, Tokoy, (1973), 292–371.

[41] Y. Namikawa, K. Ueno: The complete classification of fibers in penciles of curves of genus 2, Manuscripta Math., **9**(1973), 143–186.

[42] A. P. Ogg: On pencils of curves of genus 2, Topology, **5**(1966), 355–362.

[43] A. N. Parsion: Algebraic curves over function fields I, Math. USSR Izv., **2**(1968), 1145–1170.

[44] U. Persson: Chern invaiants of surfaces of general type, Compositio Math., **43**(1981), 3–58.

[45] U. Persson: An introduction to the geography of surfaces of general type, Proc. Sympos. Pure Math., **46**(1987), 195–218.

[46] M. Reid: Problems on pencils of small genus. (Preprint 1990)

[47] Z. Stankova-Frenkel: Moduli of trigonal curves, J. Algebraic Geom., **9**(2000), no. **4**, 607–662.

[48] S.-L. Tan: Galois triple covers of surfaces, Science in China, Ser. A., **34** (1991), 935–942.

[49] S.-L. Tan: On the base changes of penciles of curves, I, Manuscripta Math., **84**(1994), 225–244.

[50] S.-L. Tan: The minimal number of singular fibers of a semistable curve over $\mathbb{P}^1$, J. Algebraic Geometry, **4**(1995), 591–596.

[51] S.-L. Tan: On the base changes of penciles of curves, II, Math. Z., **222**(1996), 655–676.

[52] S.-L. Tan: Integral closure of a cubic extension and applications, Proc. of Amer. Math. Soc., **129**(2001), 2553–2562.

[53] S.-L. Tan: Triple covers on smooth algebraic varieties, Geometry and Nonlinear Partial Differential Equations, AMS/IP Studies in Adv. Math., **29**, Amer. Math. Soc. and Intern. Press, 2002, 143–164.

[54] G. N. Tyrina: Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points, Func. Anal. Appl., **2**(1968), 324-332.

[55] E. Viehweg: Invarianten der degenerierten Fasern in lokalen Familien von Kurven, J. Reine. Angew. Math., **293/294**(1977), 284–308.

[56] P. Wagreich: Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math., **92**(1970), 419–454.

[57] G. Xiao: Fibered algebraic surfaces with low slope, Math. Ann., **276** (1987) 449–466.

[58] G. Xiao: Surfaces fibrées en courbes degenre deux, Lect. Notes in Math., **1137** (1985) Springer-Verlag.

[59] G. Xiao: On the stable reduction of pencils of curves, Math. Z., **203** (1990), 379–389.

[60] G. Xiao: π_1 for elliptic and hyperelliptic surfaces, Intern. I. Math., **2** (1991), 599–615.

[61] 肖刚: 代数曲面的纤维化, 上海科学技术出版社, (1992)

[62] S. S.-T. Yau: Normal two-dimensional elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., **254**(1979), 117–134.

[63] S. S.-T. Yau: On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc., **257**(1980), 269-329 .

攻读博士学位期间的研究成果

1. On the upper bound of the slope of a trigonal fibration, preprint 2007. (Work with Z. Chen and S.-L. Tan)

2. Global invariants of non-hyperelliptic fibrations of genus 3, in preparation 2007.

3. On the lower bound of the slope of totally ramified triple cover fibrations, preprint 2006. (Work with P. Liu and F. Ye)

4. Classification of singularities of n-tuple covers. (Preprint 2006)

致 谢

通过三年来的学习, 我对代数几何有了更为深入的了解, 研究技巧也更趋成熟. 这篇文章可以看作是对这三年学习的一次总结. 当然今天我能写出这篇文章, 要感谢良师的教诲, 同学的帮助, 朋友的勉励. 在这里, 我要对老师、同学和朋友表示深深的谢意.

首先, 感谢我的导师陈志杰教授和谈胜利教授, 他们三年来对我的专业课程学习严格要求, 悉心教导. 在此对他们表示深深的谢意! 两位导师对我的研究方向和内容提供了很多宝贵的建议. 在他们的指点之下, 我的研究水平有了极大的提高, 对课题的认识也更为广泛且深刻. 还要特别感谢 E. Viehweg 教授, 他对我的研究提出了许多宝贵建议.

此外, 我还要特别感谢刘攀老师给我的帮助. 刘攀老师也是我最好的朋友之一，我们常常讨论各种几何问题以及研究方法, 这些谈话对我的数学观念产生了一定的影响. 同时我也参加了他所开设的诸多数学课程, 这使我的知识面大为扩展.

其次要感谢我的同学兼好友：杜荣、于飞、叶飞、高云. 我们五人一起愉快地度过了整个研究生时期. 我们常常聚在一起讨论问题, 分享个人的观点. 诸如此类愉快而又美好的回忆总是特别令人难忘. 在我的研究期间, 通过和他们的多次讨论, 我对某些专题有了更深的了解. 我的大量的研究资料也是通过他们的热心帮助才得以收集到, 因此我在这里再次表示衷心的感谢. 同时也要感谢我的师弟彭帆和左怀青. 此外我也要感谢胜茂同学的帮助, 感谢他对我的某些专题的解惑, 同时他的渊博知识也让我非常敬佩。

我还要特别感谢辅导员黄英娥老师、毕平老师以及杜若霞老师三年来对我学习和生活上的关心和帮助; 同时感谢资料室的糜老师和谷老师的帮助. 在这里我还要感谢我的室友邓斌, 我们一起度过了这段愉快的时光.